Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = [y^2(x) + 4y(x) + 5]xe^x \sin x, \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a) discutere esistenza ed unicità della soluzione al variare del parametro reale α;

b) determinare, se esiste, la soluzione (o le soluzioni) nel caso $\alpha = 0$.

Esercizio 2. Data la funzione

$$h(x) := \log\left(\frac{1 + e^{-x^2}}{2}\right) + \alpha x^2$$

a) stabilire l'ordine di infinitesimo di h per $x \to 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;

b) stabilire ora se la funzione così definita:

$$v(x) := \begin{cases} \log\left(\dfrac{1 + e^{-x^2}}{2}\right) + x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{1 - \cos(x)}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è derivabile in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Si consideri la funzione:

$$f(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_1^x \frac{\log(t)}{t\, e^t}\, dt & \text{se } x > 0 \\ |x^2 - 4| - 4 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Tracciare un grafico qualitativo di f, precisandone: dominio, segno, limiti agli estremi, monotonia. Determinare inoltre l'insieme di derivabilità di f e gli eventuali punti di massimo e/o minimo relativo ed assoluto.