

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{4 + y^3(x)}{(x^2 + x)y^2(x)} \\ y(\alpha) = 1 \end{cases}$$

- a) stabilire di che tipo è l'equazione;
- b) stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
- c) determinare, se esiste, la soluzione (o le soluzioni) nel caso $\alpha = 1$.

Esercizio 2. a) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$\ln x = k\sqrt{x}$$

- b) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = \frac{1}{\ln x - k\sqrt{x}}$ è integrabile (eventualmente in senso improprio) nell'intervallo $[1, 4]$.

Esercizio 3. Sia

$$f(x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^x \frac{\sqrt[3]{\sin^5 t}}{\ln(\cos t)} dt$$

- a) Tracciare il grafico di f , precisandone: dominio, limiti agli estremi, insieme di continuità, di derivabilità, monotonia ed eventuali punti di massimo e di minimo assoluti.