Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)\max\{0, y(x)\}e^x \sin x, \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a) discutere esistenza ed unicità della soluzione al variare del parametro reale α.

b) Sia $\alpha \neq 0$; determinare, se esiste, la soluzione o le soluzioni al variare di α.

c) Sia ora $\alpha = 0$; determinare, se esiste, la soluzione o le soluzioni.

Esercizio 2. Si consideri la seguente funzione di variabile reale:

$$f(x) = \int_{3/2}^{x} \frac{\arctan(t-2)}{\sqrt{t}-1}\,dt$$

a) Tracciare il grafico di f dopo averne determinato: il dominio, l'insieme di derivabilità, i limiti agli estremi e gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo, specificando se questi possano essere anche assoluti.

b) Stabilire se esiste l'inversa della restrizione di f a $[2, +\infty)$ e, in caso affermativo, detta g tale inversa, disegnarne il grafico.

Esercizio 3. Sia $v : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$v(x) = \begin{cases} \arctan(\beta - x) & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{\pi}{6}\cos(\beta\, x) - \alpha\, x & \text{se } x > 0 \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

a) Determinare, se esistono, i valori dei parametri α e β per cui v sia prolungabile con continuità in $\mathbb{R}$.

b) Determinare, se esistono, i valori di α e β per cui v sia prolungabile di classe C^1 in $\mathbb{R}$.

c) Stabilire per quali valori di α e β v risulta limitata nel suo dominio.

d) Determinare, se esistono, i valori di α e β per cui v sia integrabile su ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$ e, se $\alpha = 2$, $\beta = 1$, calcolare, se esiste:

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx\,.$$