

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) := \sqrt{e^x - 1 - \log(1+x)}$$

- 1) determinarne l'insieme di definizione;
- 2) calcolarne, se esiste, l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0$.

Esercizio 2. È data la funzione $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+k} & \text{se } x > 0 \\ \sin^2 x + 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

1) Tracciare il grafico della funzione f al variare di $k \in \mathbb{R}$ e stabilire per quali valori di k la funzione f ha primitive nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

2) Per $k = 0$ tracciare il grafico della funzione $y(x) = \int_1^x f(t) dt$, precisando insieme di definizione, continuità, derivabilità, monotonia e convessità e calcolare $y(-\pi)$.

Esercizio 3. È data l'equazione differenziale:

$$y' = y \sin x + H(x) \sin x, \quad \text{dove } H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

- 1) Calcolare l'integrale generale dell'equazione **nell'intervallo** $(-\infty, 0)$.
- 2) Calcolare l'integrale generale dell'equazione **nell'intervallo** $(0, +\infty)$.
- 3) Calcolare, se esistono, le soluzioni in $(-\infty, +\infty)$ dell'equazione data, tali che $y(0) = 0$.