Esercizio 1. Sia

$$h(x) := x^3 - 3x + k,\ \ k \in \mathbb{R},\ \ k \geq 0$$

a) Tracciare il grafico di $h(x)$ nel suo dominio al variare di $k \geq 0$.

b) Si considerino ora le seguenti funzioni

$$f(x) := \begin{cases} 1/(x^3 - 3x + k) & \text{se } x \geq 0 \\ \log(|x| + 1)/\sqrt[3]{x+1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) := \int_0^x f(t)\, dt$$

Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R},\ \ k \geq 0$, il dominio di g risulta tutto $\mathbb{R}$.

c) Per tali valori di k, tracciare il grafico di g, precisandone l'insieme di derivabilità, la monotonia ed i limiti agli estremi.

Esercizio 2. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x \arctan y} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Stabilire se f è continua nel suo insieme di definizione.

b) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

c) Se esistono, calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{x+1} y(x) + e^{2x} \\ y(\alpha) = 0 \end{cases}$$

1) stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione.

2) Sia ora $\alpha = -2$; determinare la soluzione (o le soluzioni), precisando il più grande intervallo in cui essa è definita.