Esercizio 1. Data la successione

$$a_n := \sqrt{n^2+2} - n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

studiare l'esistenza, ed in caso affermativo calcolare,

$$\lim_n a_n, \quad \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}, \quad \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\}, \quad \max\{a_n, n \in \mathbb{N}\}, \quad \min\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$$

Esercizio 2. È data la seguente funzione di variabile reale

$$f(x) = \begin{cases} k\,x\,\ln x - \sqrt{1+x} & \text{se } x \geq 1 \\ e^{-\alpha x} - 2\sqrt{2} & \text{se } x < 1 \end{cases} \qquad k,\, \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

a) Determinare, se esistono, i valori di $k,\, \alpha \in \mathbb{R}$ per i quali f è continua in $\mathbb{R}$.

b) Determinare, se esistono, i valori di $k,\, \alpha \in \mathbb{R}$ per i quali f è derivabile in $\mathbb{R}$ e per tali valori calcolare $f'(x)$.

c) Siano ora $k = -1$, $\alpha = \ln 2$. Determinare l'immagine di f.

Esercizio 3. Sia

$$g(x) = \frac{3\,\arctan x - x}{3\,x}$$

a) Verificare che g è prolungabile per continuità in $x = 0$.

b) Sia h la restrizione di g a $(0, +\infty)$. Calcolare $h'(x)$ e studiarne il segno.

c) Stabilire se h è invertibile e calcolare, se esiste, l'equazione della retta tangente al grafico di h^{-1} nel punto $x_o = (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3})$.