Esercizio 1. Sia data la funzione

$$f(x,y) := \frac{(|x|+y)\log(1+x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

a) determinarne e disegnarne l'insieme di definizione;

b) stabilire se la funzione è prolungabile per continuità in $(0,0)$;

c) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2. Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{(1+x^2)^\alpha}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ f risulta integrabile in ogni intervallo chiuso e limitato;

b) stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ f è strettamente monotona in $\mathbb{R}$.

Sia d'ora in poi $\alpha = \frac{1}{3}$.

c) Verificare che f è invertibile in $\mathbb{R}$ e, detta g l'inversa di f, calcolare, se esistono, $g(1)$ e $g'(1)$.

d) Sia $y(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Tracciare il grafico di y, precisandone dominio, limiti agli estremi, monotonia e convessià.

Esercizio 3. È data l'equazione differenziale

$$y'''(x) + y(x) = x + e^{kx}, \quad k \in \mathbb{R}$$

a) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione è uno spazio vettoriale?

b) Sia $k = -1$. Trovare tutte le eventuali soluzioni y tali che $y(0) = 0$.

c) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esistono soluzioni y tali che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$ di ordine 1?