Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -2(\tan x)y(x) + \sin x \\ y(k) = 0 \end{cases}$$

a) stabilire per quali valori del parametro reale k (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
b) calcolare la soluzione (o le soluzioni) nel caso $k = \pi/4$.

Esercizio 2. È data la seguente funzione di variabile reale

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} + 2\,e^{x} + k}{e^{2x} + 1} & \text{se } x \leq 0 \\ x\,\ln(2 + x) & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad , \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

a) Determinare un valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui f ammetta primitive in $\mathbb{R}$.
b) Per tale valore di k tracciare il grafico della primitiva y di f in $\mathbb{R}$ che vale 0 in $x_o = 1$.
c) Dare un'espressione esplicita per y.

Esercizio 3. Si consideri la seguente funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x + y) - e^{x+y} + x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Stabilire se f è continua nel suo dominio.
b) Determinare se esiste $\nabla f(0, 0)$.
c) Calcolare, se esiste, $\dfrac{\partial f}{\partial Q}(\dfrac{\pi}{2}, 0)$ nella direzione del vettore $Q(3, 4)$.