Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x[1+y(x)]^2}{x^2-9} \\ y(0) = k \end{cases}$$

- stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;
- stabilire per quali valori del parametro reale k (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
- determinare la soluzione o le soluzioni del problema (se possibile) nei casi $k = -1$ e $k = 0$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ (x-1)e^{-2x^2+4x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- Tracciare il grafico di f , determinandone gli insiemi di continuità, di derivabilità, la monotonia ed i limiti agli estremi;
- determinare il più grande intervallo non limitato in cui f è invertibile e calcolare, se esiste, $(f^{-1})'(3e^{-16})$;
- calcolare l'area della regione di piano delimitata dagli assi cartesiani e dal grafico di f .

Esercizio 3. Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(e^x - 1) \ln(1 + y^2)}{|x| + |y|} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Stabilire se f è continua in $(0, 0)$;
- stabilire se f è differenziabile in $(0, 0)$;
- determinare, se esiste, l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, f(1, 1))$.