Esercizio 1. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin x}\, y(x) + e^x \\ y(-\pi/2) = 1 \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione;

b) determinare il più grande intervallo, contenente il punto iniziale, in cui esiste ed è unica la soluzione;

c) calcolare, se esiste, la soluzione in tale intervallo.

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{x - \ln(1+x)}$.

a) Tracciare il grafico di f, precisandone il dominio, i limiti agli estremi, l'insieme di derivabilità e la monotonia.

b) Sia g la restrizione di f all'intervallo $(0, +\infty)$. Stabilire se g è invertibile ed in caso affermativo, calcolare, se esistono, $(g^{-1})'(\sqrt{e-2})$ e $(g^{-1})'(-\sqrt{e-2})$.

Esercizio 3. Si consideri la seguente funzione di variabile reale

$$f(x) = \begin{cases} \tan^2 x & \text{se } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0], \\ e^{-x}(x^2+1) + k & \text{se } x \in (0, +\infty) \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

a) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ (se ce ne sono) la funzione f ha primitive in $(-\frac{\pi}{2}, +\infty)$.

b) Sia ora $k = 0$. Calcolare esplicitamente $y(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\, dt$, precisando in quali punti la funzione è definita, continua e derivabile. Tracciare infine il grafico di y.