Esercizio 1. È data la seguente funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1 - xy) - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ k & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

- Determinare l'insieme di definizione I di f e rappresentarlo.
- Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ (se ce ne sono) f è continua in I .
- Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ (se ce ne sono) f è differenziabile in tutto I .
- Nel caso in cui esista, scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $P_o = (2, 0)$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{(x+1)^2} & \text{per } x \geq 0, \\ \frac{1}{2 + \sin x} + \beta & \text{per } -\pi < x < 0, \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

- Determinare per quali valori di β (se ce ne sono) la funzione g ha primitive in $(-\pi, +\infty)$.
- Per tali valori di β calcolare quella primitiva h di g tale che $h(0) = 0$.
- Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0^+$ della funzione h calcolata al punto precedente.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\log x)y(x) + x^x \sin x \\ y(\alpha) = 0 \end{cases}$$

- stabilire di che tipo è l'equazione differenziale.
- Stabilire per quali valori di α (se ne esistono) il problema ha una ed una sola soluzione.
- Sia ora $\alpha = \pi/4$. Determinare, se esiste, la soluzione, precisandone il dominio.