Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\sin x)y(x) + \sin 2x \\ y(\pi/2) = \alpha \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;

b) al variare del parametro reale α, stabilire se esso ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale e dove è definita;

c) nel caso $\alpha = 0$, determinare (se esiste) la soluzione.

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x, y) := \frac{\log(1 + \sin y)(e^{\arctan x} - 1)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

a) determinarne l'insieme di definizione;

b) stabilire se essa è prolungabile per continuità in $(0, 0)$;

c) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata è differenziabile in $(0, 0)$.

Esercizio 3. È data la seguente funzione di variabile reale:

$$f(x) := \frac{-1 - e^x}{\sqrt{1 + e^{3x}}} - k$$

a) Tracciare il grafico di f al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, determinandone i limiti agli estremi e gli eventuali punti di massimo e minimo relativo.

b) Stabilire il numero degli zeri della funzione f al variare di $k \in \mathbb{R}$, giustificando opportunamente i risultati ottenuti.