Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\sin 2x)y(x) - e^{-\cos^2 x} \arctan x \\ y(0) = k \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;

b) stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;

c) determinare la soluzione nel caso $k = 1$, precisandone il dominio.

Esercizio 2. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x - x/2 - x^2 - 1}}\, dx$$

Esercizio 3. Si consideri la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| + \alpha\, e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < -1 \\ \ln(1 + x^2) - k \arctan x & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

a) Determinare, se esistono, i valori di α, $k \in \mathbb{R}$ per cui f risulti continua in $\mathbb{R}$.

b) Determinare, se esistono, i valori di α, $k \in \mathbb{R}$ per cui f risulti derivabile in $\mathbb{R}$.

c) Determinare, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui, se indichiamo con g la restrizione di f all'intervallo $[-1, +\infty)$, g risulti invertibile in $[-1, +\infty)$.

d) Per $k = -4$, calcolare, se esiste, $(g^{-1})'(\pi + \ln 2)$.