Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) := |x+1|e^{-x/3}$$

a) determinarne gli insiemi di definizione e di derivabilità;

b) studiarne monotonia e punti di estremo relativo;

c) studiarne convessità, flessi, asintoti;

d) posto $a_n := f(n)$ $(n = 0, 1, \cdots, n, \cdots)$, alla luce delle risposte precedenti determinare (se esistono)

$$\max_n a_n, \ \min_n a_n, \ \sup_n a_n, \ \inf_n a_n, \ \lim_n a_n$$

Esercizio 2. Si consideri la funzione di variabile reale così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{(e^{x^2} - 1)} & \text{se } x < 0 \\ |x^2 - 4\,x + \alpha| & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Determinare, se esistono, i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui f è continua nel suo dominio.

Sia **da ora in poi** $\alpha = 3$ e si indichi con g la restrizione di f a $[0, +\infty)$.

b) Calcolare, se esistono, i punti di massimo e minimo relativo di g. La funzione g ha massimi e/o minimi assoluti?

d) Stabilire, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $g(x) = k$.

Esercizio 3. È data la seguente funzione:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n(1 - \ln x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1$$

a) Determinare i valori di $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ per cui esiste $f'_+(0)$ e, per tali valori di n, calcolarla.

b) Determinare i valori di $x > 0$ per cui la disequazione $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$ è soddisfatta.

c) Sia ora $n = 3$. Verificare che f_3 è invertibile in $[0, 1]$ e calcolare, se esiste, $\left(f_3^{-1}\right)'\left(\frac{2}{e^3}\right)$.