Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)/x + x^3 \arctan x \\ y(k) = 0 \end{cases}$$

a) Stabilire per quali valori del parametro reale k (se ce ne sono) il problema ammette una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
b) calcolare la soluzione (se esiste) nel caso $k = -1$, determinando anche il più grande intervallo in cui essa è definita.

Esercizio 2. È data la seguente equazione

$$\ln x = \frac{x-k}{x}$$

a) Determinarne il numero delle soluzioni al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
b) Sia ora $f(x) = \ln x - \dfrac{x+1}{x}$. Verificare che f è invertibile nel suo dominio e, detta f^{-1} la sua inversa, calcolare, se esistono, $(f^{-1})'(-2)$ e $(f^{-1})''(-2)$.

Esercizio 3. Sia

$$g(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} + \alpha\, e^x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 \ln|x| + \beta & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

a) Stabilire per quali valori di α, β, se esistono, g è derivabile in $\mathbb{R}$. Valutare inoltre se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui g sia derivabile due volte in $\mathbb{R}$.
b) Siano ora $\alpha = \beta = 0$. Tracciare il grafico della funzione $f(x) = \displaystyle\int_1^x g(t)\, dt$, determinandone dominio, limiti agli estremi, monotonia e concavità. Calcolare esplicitamente $f(-1)$ nel caso esista.