Esercizio 1. È data la seguente funzione di variabile reale:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-k} & \text{se } x > 0 \\ \cos^2 x + 1 & \text{se } x \le 0 \end{cases} , \quad k \in \mathbb{R} \,.$$

a) Stabilire per quali valori reali di k la funzione f ha primitive in $\mathbb{R}$ e per tali valori calcolarle tutte.
b) Sia ora $g(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{[|x|(1-x^3)]^\alpha}}$, determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(x)\, dx$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione: $v(x) = e^{-(x^2/2)+x} - \cos x$;
a) determinare un polinomio che approssimi v a meno di 10^{-2} in $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.
b) Sia ora

$$w(x) = \frac{v(x) - x + \lambda x^2}{\ln(1+x)} , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

stabilire l'ordine di infinitesimo di w per $x \to 0$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\sin x) y(x) + |x| e^{x - \cos x} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a) discutere esistenza ed unicità della soluzione al variare del parametro reale α, precisando il più grande intervallo in cui le soluzioni del problema sono definite;
b) determinare, se esiste, la soluzione nel caso $\alpha = 0$.