Esercizio 1. È data la funzione $f(x) := \dfrac{\ln(1+x^{2\alpha})}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

b) Sia ora $\alpha = 1$. Stabilire se converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)/(x-1) + (x-1)e^x \cos x \sin x, \\ y(\alpha) = 0 \end{cases}$$

a) individuare il tipo dell'equazione data;

b) stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in intorno del punto iniziale;

c) nel caso $\alpha = 0$, determinare la soluzione, indicando anche il più grande intervallo, contenente il punto iniziale, in cui essa è definita.

Esercizio 3. Si consideri la funzione $g(x) := \begin{cases} \arctan\left(-\dfrac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}\right) & \text{se } x \geq 0, \\ x\sqrt{|x+2|+1} & \text{se } x < 0. \end{cases}$

a) Tracciare il grafico di g, determinandone insieme di definizione, di continuità, di derivabilità, monotonia ed eventuali punti di massimo e/o minimo.

b) Stabilire se g ha primitive in $\mathbb{R}$ e tracciare un grafico qualitativo di

$$h(x) = \int_{-2}^{x} g(t)\,dt\,.$$