

Esercizio 1. Si consideri la seguente equazione nell'incognita $x \in \mathbb{R}$:

$$x \ln |x| - x = k x^2, \quad k \in \mathbb{R}$$

- a) Determinare il numero ed il segno delle eventuali soluzioni dell'equazione data al variare del parametro k .
- b) Stabilire l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow e^2$ di $f(x) = x \ln |x| - x - \frac{1}{e^2} x^2$.

Esercizio 2. Sia

$$f(x) = \int_2^x g(t) dt \quad \text{con} \quad g(t) = \frac{e^{\arctan t} - 1}{(t-3) \ln(1+t)}$$

- 1) determinare l'insieme di definizione I di f e studiare i limiti di f agli estremi dell'insieme I ;
- 2) dove esiste, calcolare $f'(x)$ e studiare la monotonia di f ;
- 3) calcolare l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \rightarrow 2$.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x^2 - 1)y'(x) + xy(x) + \sqrt{1 - x^2} = 0 \\ y(0) = k \end{cases}$$

- 1) stabilire per quali valori del parametro reale k il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
- 2) se esiste, determinare la soluzione (o le soluzioni) per $k = 0$, precisando il più grande intervallo in cui essa è definita.