Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = [y(x)+2]^2 \arctan(\sqrt{x}) \\ y(1) = k \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione;
b) determinare (se esistono) i valori del parametro reale k per i quali il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
c) calcolare la soluzione (se esiste) nei casi $k = -2$ e $k = 1$.

Esercizio 2. È data la seguente funzione di variabile reale

$$f(x) = e^{2x} - \ln|1+x| + kx - 1\,, \quad k \in \mathbb{R}$$

a) Nel caso in cui $k \geq 0$, determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.
b) Sia ora $k = -1$. Stabilire l'ordine di infinitesimo di f per $x \to 0$.

Esercizio 3. Si considerino le seguenti funzioni

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{1+x}} & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad f(x) = \int_0^x g(t)\,dt\,.$$

a) Tracciare il grafico di f, precisandone dominio, limiti agli estremi, insieme di continuità e di derivabilità e la monotonia.
b) Calcolare, se esiste, $f\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.