

Esercizio 1. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -(2/x)y(x) - \arctan(1/x) \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

- Stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;
- trovare il più grande intervallo, contenente il punto iniziale, in cui la soluzione è definita;
- determinare, se esiste, tale soluzione.

Esercizio 2. Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sin(x^2 - x) - x \ln(1 + x) + x}{\arctan x - x}$$

- Determinare il dominio di f e calcolare, se esiste, il $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- Sia ora $g(x) = \int_0^x f(t) dt$. Determinare il dominio di g .

Esercizio 3. Sia h la funzione definita da:

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{\tan(xy^2) - \sin(xy^2)}{x^3 y^6} & \text{se } xy \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

- Determinare il dominio di h e rappresentarlo sul piano cartesiano;
- stabilire se h è continua nel suo dominio;
- determinare se h è derivabile nel punto $P(0, 1)$ ed, in caso affermativo, calcolare $\nabla h(0, 1)$.