Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)/x + x^2 \log(1 + |x|), \\ y(-1) = \alpha \end{cases}$$

a) stabilire, per ogni valore reale del parametro α, se esiste una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale.
b) Sia ora $\alpha = 0$; calcolare, se esiste, la soluzione, determinando anche il più grande intervallo in cui essa è definita.

Esercizio 2. Si consideri la funzione integrale

$$f(x) := \int_0^x \frac{e^t - 1}{(t + 2)\sqrt[5]{t^2 - \arctan(t^2)}}\, dt$$

a) Applicando la teoria degli integrali impropri, determinarne l'insieme di definizione;
b) determinarne l'insieme di derivabilità;
c) studiarne i limiti agli estremi dell'insieme di definizione.

Esercizio 3. Data l'equazione nell'incognita x:

$$x - e^{kx} = x \ln x - 2, \quad k \in \mathbb{R},$$

a) valutare se, al variare di $k \in \mathbb{R}$, ammette soluzioni e stabilirne il numero, giustificando accuratamente la risposta.
b) Determinare se la restrizione di $v(x) = x - e^x - x \ln x + 2$ all'intervallo $[1, +\infty)$ è invertibile e calcolare, se esiste, $(v^{-1})'(4 - e^2 - \ln 4)$.