Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = [y^2(x) - 3y(x) + 2](1 + 3x^2) \arctan x \\ y(0) = k \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;

b) stabilire per quali valori del parametro reale k (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;

c) determinare la soluzione o le soluzioni del problema (se esistono) nei casi $k = 0$ e $k = 2$.

Esercizio 2. Si consideri la seguente equazione nell'incognita x

$$\ln(1 + k^2\, x) - k\, x + 1 = 0\,, \quad k \in \mathbb{R}$$

a) Determinarne il numero di soluzioni al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

b) Sia ora $f(x) = \ln(1 + x) + x + 1$. Stabilire se f è invertibile nel suo dominio ed in caso affermativo, calcolare, se esiste, $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

Esercizio 3. Sia $g(x) = \displaystyle\int_2^x h(t)\, dt$ con

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(t+1)\sqrt{4-t}} & \text{se } t < 4 \\ \dfrac{\ln(t-4)}{1-e^t} & \text{se } t > 4 \end{cases}$$

a) Determinare l'insieme di definizione I di g e studiare i limiti di g agli estremi di I.

b) Dove esiste, calcolare $g'(x)$ e studiare la monotonia di g.

c) Determinare il numero di zeri di g nell'insieme $(-\infty, 4) \cap I$.

d) Specificare se g risulta primitiva di h in I, giustificando la risposta.