Esercizio 1. Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) := \alpha\, x^2 - x\, \cos x + \arctan x\,,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinitesimo di f per $x \to 0$.
b) Sia ora $\alpha = 0$. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|^\beta}{|x - \sin x|}$, al variare di $\beta > 0$ e, nel caso in cui tale limite sia zero o $+\infty$, specificarne l'ordine.

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x,y) := \frac{e^{xy} - 1}{\log(1 + |x|) + |\sin y|}$$

a) determinarne l'insieme di definizione;
b) stabilire se la funzione è prolungabile per continuità in $(0,0)$;
c) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 3. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} y(x)\, y'(x) = x\, \sqrt{4 - y^2(x)} \\ y(0) = k \end{cases} \quad ,\ k \in \mathbb{R}$$

a) Stabilire per quali valori di $k \neq 0$ (se esistono) il problema ha sicuramente un'unica soluzione in un intorno del punto iniziale.
b) Siano ora $k = 0$ ed $u(x) = y^2(x)$. Determinare il problema differenziale che la funzione u soddisfa e stabilire se tale problema ammette un'unica soluzione locale.
c) Sempre per $k = 0$, determinare u e quindi y, precisandone l'insieme di definizione.