**Esercizio 1.** Data la seguente funzione:

$$f(x) := \begin{cases} -1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ (x-1)\, e^{-2x^2+4x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

a) studiare la continuità e la derivabilità di $f$, determinarne gli eventuali asintoti e tracciarne il grafico $\gamma$;
b) verificare che la funzione è invertibile nell'intervallo $I = (\frac{3}{2}, +\infty)$ e determinare

$$(f^{-1})'(y_o), \quad \text{essendo } \ y_o = f(4);$$

c) calcolare l'area della regione piana delimitata dagli assi cartesiani e da $\gamma$.

**Esercizio 2.** Data la seguente funzione:

$$g(x) := \frac{ax^2 + bx + c}{dx - 4}\,, \quad \text{con } \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\,,$$

a) determinare $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione abbia per asintoto obliquo la retta di equazione $y = x + 1$ e massimo relativo uguale a 1 per $x = 2$.
b) Tra tutti i rettangoli, aventi un lato sull'asse $x$ ed inscritti nella regione di piano limitata dalla funzione determinata al punto precedente e dal semiasse $x \geq 0$, determinare quello avente area massima.

**Esercizio 3.** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1 - x^2)y'(x) - xy(x) + 1 = 0 \\ y(0) = k \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;
b) determinare gli eventuali valori del parametro reale $k$ per i quali il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
c) determinare la soluzione (o le soluzioni) nel caso $k = 1$, precisandone l'insieme di definizione.