

**Esercizio 1.** È data la seguente equazione:

$$(k - x)e^{kx} = k, \quad k > 0.$$

- a) Stabilire se ha soluzioni al variare del parametro  $k > 0$ .
- b) Nel caso in cui il punto a) abbia risposta affermativa, determinare il numero ed il segno di tali soluzioni.

**Esercizio 2.** Dopo aver verificato che la funzione:

$$f(x) = \frac{(e^{x^2} - 1)x - x^3}{x(\sqrt{x} - \sin \sqrt{x})}$$

è infinitesima per  $x \rightarrow 0^+$ , determinarne l'ordine.

- a) Stabilire quindi se  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  è convergente o divergente.

**Esercizio 3.** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = [4 + y^2(x)]x \log(1 + x) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

- a) riconoscere il tipo dell'equazione differenziale;
- b) stabilire per quali valori del parametro reale  $\alpha$  (se ce ne sono) il problema ammette una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
- c) posto ora  $\alpha = 0$ , determinare, se possibile, la soluzione, precisando un intervallo in cui essa è certamente definita.