Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos x)y(x) + e^{\sin x} \arctan |x| \\ y(0) = k \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;

b) stabilire per quali valori del parametro reale k (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione e trovarne l'insieme di definizione I;

c) determinare la soluzione o le soluzioni del problema (se possibile) nel caso $k = 1$;

d) stabilire se la soluzione trovata al punto c) è di classe $C^1(I)$, o di classe $C^2(I)$, o di classe $C^\infty(I)$.

Esercizio 2. Siano $f(x) = e^{-x}\sqrt{1+x}$ e $g(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$.

a) Tracciare il grafico di g, dopo averne determinato il dominio, gli insieme di continuità e derivabilità, i limiti agli estremi, la monotonia e la convessità.

b) Risolvere la disequazione $\sqrt{t+1} \leq \dfrac{t+3}{2\sqrt{2}}$ e, tenendo conto di tale diseguaglianza, calcolare esplicitamente un maggiorante del $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

c) Sia ora a_n la successione così definita: $a_n = \displaystyle\int_{n}^{n+1} f(t)\,dt$.
Dimostrare che $f(n+1) \leq a_n \leq f(n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3. Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = e^{-x} - \ln(1 + k\,x) - (x-1)^2$$

a) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ di f.

b) Sia ora $k = 1$. Determinare il polinomio di Mac Laurin di f di grado 3 e valutare l'errore commesso approssimando f con tale polinomio nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$.