

Esercizio 1. Si consideri la seguente funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 4e^{-x^2-y^2}$$

- a) Stabilire se f è superiormente limitata.
- b) Calcolare, se esistono, gli eventuali massimi e minimi relativi di f nel suo dominio.
- c) Nel caso in cui esistano, valutare se tali massimi e minimi relativi siano anche assoluti.

Esercizio 2. Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = e^{x^2} + e^{-x^2} - 2 \cos x + k \ln(1 - x^2), \quad k \in \mathbb{R}$$

- a) Determinare l'ordine di infinitesimo di f per $x \rightarrow 0$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
- b) Sia $k = 0$. Determinare un polinomio che approssimi f in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$ a meno di 10^{-2} .

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2\sqrt{9 - y^2(x)} x \arctan(x^2) \\ y(0) = k \end{cases}$$

- a) stabilire per quali valori reali di k (se ce ne sono) esiste ed è unica la soluzione del problema;
- b) sia ora $k = 0$; calcolare (se esiste) la soluzione, determinando altresì un intervallo in cui è certamente definita.