Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)}{1+x^2} + e^{\arctan x}|x-1| \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

a) stabilire per quali valori di α (se ce ne sono) la soluzione del problema esiste ed è unica, e determinarne l'insieme di definizione;
b) calcolare esplicitamente la soluzione (se esiste) nel caso $\alpha = 0$.

Esercizio 2. Sia f la funzione definita da:

$$f(x) := \frac{x^n \, \tan x}{\ln(1-\sin^2 x)} \,.$$

a) Determinare il dominio di f e stabilire per quali valori di $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ f$ è infinitesima per $x \to 0$.
b) Per i valori di n determinati al punto precedente, si stabilisca l'ordine di infinitesimo di f per $x \to 0$.

Esercizio 3. Si consideri la seguente equazione nell'incognita x:

$$e^{-x} = k - x\,, \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

a) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione data al variare di $k \in \mathbb{R}$.
b) Sia ora $g(x) := \dfrac{1}{e^{-x} + x - e + 1}$. Tracciare il grafico di g e stabilire se i seguenti integrali impropri sono convergenti:

$$\int_{-\infty}^{-2} g(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{-1} g(x)\,dx\,.$$