Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (1+\cos x)y(x) + xe^{\sin x} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a) al variare del parametro reale α, stabilire se esso ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
b) nel caso $\alpha = 1$, determinare (se esiste) la soluzione, indicando anche il piu' grande intervallo in cui essa è definita.

Esercizio 2. Si consideri la seguente equazione nella variabile $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{x/2} - 1 = \log(2+x)$$

a) Stabilire il numero ed il segno delle eventuali soluzioni dell'equazione data, giustificando opportunamente i risultati ottenuti.
b) Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione $f(x) = e^{x/2} - 1 - \log(2+x) + \log 2$

Esercizio 3. Sia $f(x) = \displaystyle\int_3^x g(t)\,dt$ con

$$g(t) = \begin{cases} e^{2-t} & \text{se } t > 2, \\ 2 - 1/\sqrt[3]{t-1} & \text{se } t < 2. \end{cases}$$

a) Determinare l'insieme di definizione di g e disegnare il grafico di g.
b) Determinare l'insieme di definizione di f e studiare i limiti di f agli estremi dell'insieme di definizione.
c) Calcolare, dove esiste, $f'(x)$.
d) Se esistono, calcolare esplicitamente $f(2)$ ed $f(0)$.