Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = xy^3(x)[\arctan x + \log(1+x)], \\ y(0) = k \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione;

b) discutere esistenza ed unicità della soluzione in un intorno del punto iniziale, al variare del parametro reale k;

c) determinare, se esiste, la soluzione (o le soluzioni) nei casi $k = 0,\ k = -1$.

Esercizio 2. Si consideri la seguente funzione: $f(x) = e^x \ln^2 |3 - x|$.

a) Determinare il polinomio di Taylor di secondo grado di f centrato in $x_o = 2$.

b) Tracciare il grafico di f nel suo dominio (non è richiesto lo studio di f'').

Esercizio 3. È dato il seguente problema differenziale: $\begin{cases} y'(x) = g(x) \\ y(-1) = 0, \end{cases}$ dove:

$$g(x) = \begin{cases} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) & \text{se } x \geq 0, \\ \dfrac{2\,e^{2x}}{e^{2x} - 5\,e^x + 6} + k & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, stabilire se il problema ammette soluzioni, quante soluzioni ha ed il loro insieme di definizione.

b) Sia $k = -1$. Calcolare esplicitamente, se esistono, tutte le soluzioni del problema dato.