Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x)/(x^2-1) + (1-x)e^x \\ y(0) = k \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;

b) stabilire qual è il più grande intervallo, contenente il punto iniziale, in cui esiste ed è unica la soluzione al variare del parametro reale k;

c) calcolare, se esiste, la soluzione nel caso $k = 1$.

Esercizio 2. Sia

$$h(x) = \begin{cases} (\tan x)^2 & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ e^{-x}(x^2+1) + k & \text{se } x > 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

a) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la funzione h ha primitive in $(-\frac{\pi}{2}, +\infty)$ e, per tali valori di k, tracciare il grafico della primitiva di h nulla nel punto $x_o = -1$.

b) Per $k = 0$ calcolare esplicitamente $y(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} h(t)\,dt$, precisando in quali punti x la funzione y è definita, continua e derivabile.

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\arctan(1-e^{xy})}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } x > 0, \\ 1 - e^{\arctan xy} & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

b) Studiare la differenziabilità di f in (0,0).

c) Se esiste, calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ se $x > 0$.

d) Se esiste, calcolare $\frac{\partial f}{\partial Q}(-1,1)$ con $Q = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.