Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$f(x) := \begin{cases} y'(x) = -\dfrac{1}{x\,\ln(|x|)}\,y(x) + x \\ y(-e) = \alpha \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione;

b) studiare esistenza ed unicità della soluzione al variare del parametro reale α, indicando il più grande intervallo in cui essa è definita;

c) calcolare la soluzione (o le soluzioni) nel caso $\alpha = 0$.

Esercizio 2. È data la funzione

$$f(x) = \arctan\big(\frac{x+1}{x-3}\big) + kx, \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

a) Stabilire il numero ed il segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ al variare del parametro $k \leq 0$.

b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx\,.$$

Esercizio 3. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \int_{2}^{x} \frac{\ln(t^2)}{\sqrt{t^3 - 4t}}\,dt\,.$$

a) Tracciare il grafico di h, precisandone: dominio, limiti agli estremi, continuità, derivabilità e monotonia.

b) Stabilire se h è invertibile nel suo dominio e, in caso affermativo, tracciare il grafico della funzione inversa h^{-1}, precisandone dominio ed immagine.

c) Tenendo conto del grafico di h, tracciare il grafico di $v(x) = h(x^2)$, precisandone il dominio e le eventuali simmetrie.