Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)}{(1+x^2)\arctan x} + x \arctan x \log|x| \\ y(\alpha) = 0 \end{cases}$$

a) riconoscere il tipo dell'equazione differenziale;
b) stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ammette una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
c) posto ora $\alpha = -e$, determinare, se possibile, la soluzione, precisando il più grande intervallo in cui essa è definita.

Esercizio 2. Si consideri la seguente funzione di variabile reale:

$$f(x) := a - 1 + e^{3x^2}, \ a \in \mathbb{R}.$$

a) Tracciare il grafico di f al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.
b) Sia $\boldsymbol{a=2}$. Determinare un polinomio che approssimi f in $[-1/2, 1/4]$ a meno di $1/100$.

Esercizio 3. Sono date le seguenti funzioni:

$$g(x) = (x+2)\arctan(bx), \quad v(x) = x^2 + kx, \quad w(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \geq 0, \\ v(x) & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (b,\, k \in \mathbb{R}).$$

a) Determinare, se esistono, i valori di b, $k \in \mathbb{R}$ tali che w sia invertibile in $\mathbb{R}$.
b) Stabilire per quali valori dei parametri b, $k \in \mathbb{R}$, se esistono, w è dotata di primitive in $\mathbb{R}$;
c) Siano $\boldsymbol{b=1, k=2}$. Determinare la primitiva y di w in $\mathbb{R}$ tale che $y(-1) = 0$.