

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2xy(x) + x \sin(x^2) \\ y(\alpha) = 0 \end{cases}$$

- riconoscere il tipo dell'equazione differenziale e determinare l'insieme di definizione delle eventuali soluzioni;
- stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ammette una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
- posto ora $\alpha = 0$, determinare, se possibile, la soluzione.

Esercizio 2. Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_0^x \frac{\arctan t}{(t+3)\sqrt[5]{e^{t^2}-1}} dt$$

- applicando la teoria degli integrali impropri, determinarne l'insieme di definizione;
- determinarne l'insieme di derivabilità;
- studiarne i limiti agli estremi dell'insieme di definizione.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = (kx + 1)e^{-x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.

- Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero ed il segno degli eventuali zeri di f ;
- determinare tutti gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo di f e stabilire quali di essi sono anche punti di massimo o minimo assoluto.