Analisi matematica I – ingegneria edile-architettura

Esame scritto – 13 settembre 2007

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}\, y(x) + \dfrac{1}{x} \\ y(-1) = \alpha \end{cases}$$

a) riconoscere il tipo dell'equazione differenziale;

b) stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ammette una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;

c) posto ora $\alpha = 0$, determinare, se possibile, la soluzione, precisando il più grande intervallo in cui essa è definita.

Esercizio 2. Data la seguente funzione di variabile reale:

$$f(x) := \int_0^x \frac{\sin^2 t - \cos^2 t + 1}{t^2}\, dt$$

a) stabilirne dapprima il dominio;

b) determinare poi un opportuno polinomio di Mc Laurin che approssimi f in $[0, 1/2]$ a meno di 10^{-2}.

Esercizio 3. Si consideri la seguente funzione:

$$g(x) := \begin{cases} -x^2 + k & \text{se } x \leq 0, \\ e^{a/x} - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (a,\, k \in \mathbb{R});$$

a) determinare, se possibile, i valori di a, $k \in \mathbb{R}$ per cui g sia invertibile in $\mathbb{R}$;

b) determinare, se possibile, i valori di a, $k \in \mathbb{R}$ per cui g sia continua in $\mathbb{R}$.

c) Siano ora $a = 2$, $k = -4$. Calcolare, se esistono, $(g^{-1})'(3)$ e $(g^{-1})'(-5)$.