Esercizio 1. Data l'equazione differenziale

$$y''(x) + 2\alpha y'(x) + y(x) = \sin x + \cos x$$

a) determinare i valori del parametro reale α (se ne esistono) per i quali le soluzioni dell'equazione sono tutte limitate in $(-\infty, 0]$;
b) determinare l'integrale generale dell'equazione nel caso $\alpha = 0$.

Esercizio 2. È dato il problema ai valori iniziali

$$(*) \quad y'(x) = \frac{1 - y^2(x)}{1 + \sin^2(x)} \cos x, \quad y(0) = y_o \, .$$

a) Stabilire per quali valori di $y_o \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione locale di $(*)$.
b) Sia ora $y_o = 1$. Determinare tutte le soluzioni del problema, precisandone l'insieme di definizione.
c) Sia infine $y_o = 0$. Determinare una formula esplicita per la corrispondente soluzione di $(*)$, precisandone l'insieme di definizione.

Esercizio 3. Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) := \int_0^x \frac{\arctan(t-1)}{\sqrt[3]{e^t - 1}\, |t-1|^\alpha} \, dt.$$

a) Discutere il dominio di f al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Sia ora $\alpha = \frac{3}{2}$. Tracciare un grafico di f, dopo averne determinato gli insiemi di continuità e di derivabilità, la monotonia, gli eventuali punti di massimo e minimo relativo e i limiti agli estremi dell'insieme di definizione. (Non è richiesto lo studio della concavità della funzione).