Esercizio 1. Si consideri l'equazione differenziale

$$3y'''(x) - 2ky''(x) + ky'(x) = e^{2x}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

a) Determinare gli eventuali valori reali di k per cui tutte le soluzioni dell'equazione sono limitate in $(-\infty, 0]$.
b) Calcolare (se ne esistono) tutte le soluzioni del problema

$$\begin{cases} 3y'''(x) - 8y''(x) + 4y'(x) = e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{x-y(x)} \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$$

a) Stabilire per quali valori di $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione locale.
b) Per tali valori di (x_o, y_o) determinare se la soluzione $y(x)$ è invertibile in un intorno di x_o ed in caso affermativo calcolare la derivata dell'inversa nel punto y_o.
c) Siano ora $x_o = 1,\ y_o = 0$; calcolare esplicitamente, se esiste, la soluzione del problema, precisandone dominio ed immagine.

Esercizio 3. Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_1^x \frac{\sqrt[5]{t - \arctan t}\ \sqrt[3]{e^t - e}}{(e^t - 1)(t - 1)}\, dt$$

a) tenendo conto della teoria degli integrali impropri, determinarne l'insieme di definizione;
b) determinarne l'insieme di derivabilità;
c) studiare i limiti della funzione agli estremi del suo insieme di definizione.