Esercizio 1. Sia $\quad h(x) := \dfrac{(e^x - e^{-x} - 2\sin x)\ln(1+ax)}{x^4}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

a) Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$, se esiste, $\quad \lim_{x\to 0} h(x)$.

b) Sia ora

$$v(x) := \begin{cases} h(x) & \text{se } x > 0 \\ -\cos x & \text{altrove} \end{cases}$$

Determinare il dominio di v e stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, v risulta continua in tale insieme.

Esercizio 2. Sia $\quad f(x) := \dfrac{x}{(2x^2+1)(x-3)}$.

a) Stabilire se f ammette primitive in $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ ed in caso affermativo determinarle tutte.

b) Posto ora

$$g(x) := f(x)\,\sqrt{|x-3|} \quad \text{ed} \quad F(x) := \int_0^x g(t)\,dt,$$

disegnare un grafico qualitativo di F, precisandone: dominio, eventuale monotonia e comportamento agli estremi (non è richiesto lo studio della derivata seconda).

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 3x^2 y(x) + |x^5|, \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a) discutere esistenza ed unicità della soluzione al variare del parametro reale α, precisando il più grande intervallo in cui le soluzioni del problema sono definite;

b) determinare, se esiste, la soluzione nel caso $\alpha = 1$.