

**Esercizio 1.** Si consideri la seguente funzione di variabile reale:

$$f(x) := 4 - 3 \ln(1/x) + [\ln(1/x)]^3.$$

a) Disegnarne un grafico qualitativo precisando: l'insieme di definizione, i limiti agli estremi dell'insieme di definizione, la monotonia e gli eventuali massimi e minimi relativi e assoluti.

b) Calcolare, se esiste,

$$\int_{1/e}^e \frac{f(x)}{x} dx.$$

**Esercizio 2.** Data la funzione

$$g_\alpha(x) := \begin{cases} [|x| - \arctan(|x|)] \sqrt{\frac{1}{x^6} + 1} & \text{se } x \neq 0, \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

a) determinare le eventuali simmetrie di  $g_\alpha$ ;

b) determinare, se esiste,  $\alpha \in \mathbb{R}$  tale che  $g_\alpha$  sia continua in  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x[1 + y(x)]^2}{\sqrt{4 + x^2}} \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

a) determinare gli eventuali valori dei parametri reali  $\alpha$ ,  $\beta$  per i quali il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;

b) determinare la soluzione (o le soluzioni) nei casi:  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ;  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -1$ , precisandone il dominio.