

Esercizio 1. Si consideri la seguente funzione di variabile reale:

$$f(x) := 4 - 3 \ln(1/x) + [\ln(1/x)]^3.$$

a) Disegnarne un grafico qualitativo precisando: l'insieme di definizione, i limiti agli estremi dell'insieme di definizione, la monotonia e gli eventuali massimi e minimi relativi e assoluti.

b) Calcolare, se esiste,

$$\int_{1/e}^e \frac{f(x)}{x} dx.$$

Esercizio 2. Data la funzione

$$g_\alpha(x) := \begin{cases} [|x| - \arctan(|x|)] \sqrt{\frac{1}{x^6} + 1} & \text{se } x \neq 0, \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

a) determinare le eventuali simmetrie di g_α ;

b) determinare, se esiste, $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che g_α sia continua in \mathbb{R} .

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x[1 + y(x)]^2}{\sqrt{4 + x^2}} \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

a) determinare gli eventuali valori dei parametri reali α , β per i quali il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;

b) determinare la soluzione (o le soluzioni) nei casi: $\alpha = 0$, $\beta = 1$; $\alpha = 0$, $\beta = -1$, precisandone il dominio.