

Esercizio 1. Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_0^x \frac{1 - e^{\sin t}}{[t^2 - (\pi - 3)t - 3\pi] \arctan t} dt$$

- a) sulla base della teoria degli integrali impropri, determinarne l'insieme di definizione;
- b) determinarne l'insieme di derivabilità;
- c) stabilire se esistono i limiti di f agli estremi del suo insieme di definizione, precisando se reali o meno;
- d) nel caso in cui f sia infinitesima per $x \rightarrow 0$, determinarne (se esiste) l'ordine di infinitesimo;
- e) se la funzione è definita nell'intervallo $[0, 1]$, stabilire se essa è iniettiva in tale intervallo.

Esercizio 2. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin(y(x))} \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

- a) Studiare esistenza ed unicità locale della soluzione al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.
- b) Determinare, se esistono, i valori di y_0 per i quali esistono soluzioni costanti.
- c) Sia d'ora innanzi $y_0 = \pi/2$. Tracciare il grafico locale della soluzione.
- d) Calcolare, al variare del parametro reale k il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(y(x) - \pi/2 - x + 1)^k}{(x - 1)^2}$$

- e) Determinare un'espressione analitica esplicita per la soluzione precisandone il dominio.