Esercizio 1. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{x}y(x) + |x-1| \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a) [3p.ti] Discutere esistenza ed unicità della soluzione al variare delle condizioni iniziali, specificando il dominio della eventuale soluzione.
b) [3p.ti] Siano $x_0 = -1$ e $y_0 = 0$. Tracciare il grafico della soluzione in un intorno del punto iniziale.
c) [3p.ti] Siano $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$. Determinare la soluzione, se esiste.
d) [3p.ti] Siano $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$. Studiare la convergenza del seguente integrale al variare del parametro positivo k:

$$\int_1^{+\infty} \frac{y(x)}{x^k}\,dx$$

e) [3p.ti] Siano $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$. Calcolare, se converge, il seguente integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{y(x)}{x^4}\,dx$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathrm{dom}f \to \mathbb{R}$ la funzione di due variabili reali definita da

$$f(x,y) := \frac{x^2y^2}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \forall (x,y) \in \mathrm{dom}f$$

a) Determinare $\mathrm{dom}f$ e rappresentarlo graficamente;
b) provare che f è limitata, sia superiormente sia inferiormente;
c) posto

$$\overline{f} := \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in \mathrm{dom}f \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin \mathrm{dom}f \end{cases}$$

stabilire se $\overline{f}$ è continua;
d) stabilire per quali versori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ esiste $\frac{\partial \overline{f}}{\partial \mathbf{v}}(0,0)$.