Principio di massimo per soluzioni di equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo cordes.

MAURIZIO CHICCO (Genova) (*) (**)

Sunto. – *Si provano alcuni principi di massimo (forte e debole) per soluzioni e sottosoluzioni delle equazioni lineari ellittiche del secondo ordine di tipo Cordes.*

Summary. – *Weak and strong maximum principles are proven for solutions and subsolutions of linear second order elliptic partial differential equations of Cordes type.*

1. – Introduzione.

Il presente lavoro si può considerare un completamento di [3]. In un aperto Ω di R^n è dato l'operatore ellittico

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \tag{1}$$

ove sui coefficienti a_{ij} non si fanno ipotesi di regolarità, ma si suppone che gli autovalori della forma quadratica associata siano abbastanza vicini tra loro (ipotesi di CORDES: vedi ad esempio [6], [17], [3], ...). In [3] si è provato che per ogni $f \in L_2(\Omega)$ il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f & \text{q.o. in } \Omega\,, \\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2}$$

ammette una ed una sola soluzione purchè il coefficiente c di L abbia estremo inferiore essenziale in Ω abbastanza grande. Nel presente lavoro si dimostra che per la risolubilità del problema (2) è sufficiente che l'estremo inferiore essenziale di c in Ω sia positivo. Inoltre in ipotesi leggermente più restrittive sui coefficienti b_i, c di L sussiste il principio di massimo forte per le soluzioni e le sottosoluzioni dell'equazione $Lu = 0$ q.o. in Ω.

Ringrazio il prof. H. O. CORDES per avermi fatto conoscere un suo manoscritto contenente le dimostrazioni dei risultati di [7].

(*) Entrata in Redazione il 23 luglio 1973.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del « Centro di studio per la matematica e la fisica teorica del C.N.R. », presso l'Università di Genova.

2. – Notazioni ed ipotesi.

Nel seguito si faranno sempre le ipotesi seguenti, salvo avviso contrario. Sia Ω un insieme aperto limitato e connesso di R^n; per semplicità supponiamo $n \geqslant 3$ (per $n = 2$ i risultati sono già ben noti: si veda ad esempio [18]). La frontiera di Ω, denotata con $\partial\Omega$, sia rappresentabile localmente come grafico di una funzione dotata di derivate seconde continue. Siano $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ gli spazi ottenuti completando rispettivamente $C^1(\bar{\Omega})$, $C_0^1(\Omega)$ secondo la norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Sia $H^2(\Omega)$ lo spazio ottenuto completando $C^2(\bar{\Omega})$ secondo la norma

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \|u_x\|_{L_2(\Omega)} + \|u_{xx}\|_{L_2(\Omega)}$$

ove si è posto per brevità

$$u_x = \left\{\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad u_{xx} = \left\{\sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j}^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Per noti teoremi (vedi ad esempio [14] cap. 2) nello spazio $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ le quantità $\|u\|_{H^2(\Omega)}$ e $\|u_{xx}\|_{L_2(\Omega)}$ costituiscono norme equivalenti.

Indichiamo con $H^2(\Omega, \partial\Omega)$ lo spazio definito nel modo seguente:

$$H^2(\Omega, \partial\Omega) = \text{completamento in } H^2(\Omega) \text{ di}$$
$$\{v: v \in C^2(\bar{\Omega}),\ v = 0 \text{ su } \partial\Omega\}.$$

Per le ipotesi fatte su $\partial\Omega$ e per noti risultati (vedi ad esempio [5]) risulta $H^2(\Omega, \partial\Omega) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Se α è una costante reale ed $u \in H^1(\Omega)$, si dirà che $u \leqslant \alpha$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$ se esiste una successione $\{u_j\}_{j\in N} \subset C^1(\bar{\Omega})$ tale che $u_j \leqslant \alpha$ su $\partial\Omega$ $(j = 1, 2, \ldots)$ e $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$. Analogamente se $v \in H^2(\Omega)$ si dirà che $v \leqslant \alpha$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^2(\Omega)$ se esiste una successione $\{v_j\}_{j\in N} \subset C^2(\bar{\Omega})$ tale che $v_j \leqslant \alpha$ su $\partial\Omega$ e $\lim_{j\to\infty} \|v_j - v\|_{H^2(\Omega)} = 0$. A questo proposito vale la seguente:

PROPOSIZIONE 1. – *Sia $v \in H^2(\Omega)$. Allora è $v \leqslant \alpha$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^2(\Omega)$ se e solo se è $v \leqslant \alpha$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE. – [5], teorema 8. ■

Poniamo poi, se $u \in H^1(\Omega)$:

$$\max_{\partial\Omega}{}^* u = \inf\{\alpha: \alpha \in R,\ u \leqslant \alpha \text{ su } \partial\Omega \text{ nel senso di } H^1(\Omega)\}.$$

Sui coefficienti di L si fanno le ipotesi seguenti:

$$a_{ij}\in L_\infty(\Omega)\,;\qquad a_{ij}=a_{ji}\ \text{ q.o. in } \Omega\ (i,j=1,2,\dots,n)\,,\qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\equiv 1\ \text{ in } \Omega\,.$$

Posto $a=\operatorname{ess\,inf}_{\Omega}\Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\Big]^{-1}$, supponiamo che risulti $a>n-1$. Non è restrittivo modificare i valori dei coefficienti a_{ij} in un sottoinsieme di $\bar{\Omega}$ di misura nulla in modo che

$$\Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(x)\Big]^{-1}\geqslant a\qquad \forall x\in\bar{\Omega}\,. \tag{3}$$

Tali ipotesi implicano la positività della forma quadratica associata alla matrice $((a_{ij}))$: risulta infatti

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)t_i t_j\geqslant \frac{1-\sqrt{n-a}}{n}\,|t|^2\qquad \forall x\in\Omega,\ \forall t\in R^n \tag{4}$$

(vedi [17] pag. 290). Sia poi $b_i\in L_n(\Omega)$ $(i=1,2,\dots,n)$, $c\in L_s(\Omega)$ con $s=2$ per $n=3$, $s>2$ per $n=4$, $s=n/2$ per $n\geqslant 5$. Sia L l'operatore definito dalla (1) e sia L_0 l'operatore L ove si pone $c=0$:

$$L_0=-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial}{\partial x_i}\,.$$

Se k è una costante positiva e y un punto di R^n, indicheremo con $S(y,k)$ l'intorno sferico di centro y e raggio k:

$$S(y,k)=\{x\colon x\in R^n,\ |x-y|<k\}\,.$$

Se D è un sottoinsieme di $\bar{\Omega}$, w una funzione definita in D e h una costante con $0<h\leqslant 1$, poniamo

$$H(w,h,D)=\sup\{|w(x')-w(x'')|\cdot|x'-x''|^{-h}\colon x',x''\in D,\ x'\neq x''\}\,.$$

3. – Lemmi preliminari.

Premettiamo un risultato noto:

LEMMA 2. – *Sia $u\in H^1(\Omega)\cap C_0(\bar{\Omega})$, α una costante reale. Allora è $u\leqslant\alpha$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$ se e solo se è $u(x)\leqslant\alpha$ per ogni $x\in\partial\Omega$.*

DIMOSTRAZIONE. – vedi [5] corollario 6. ■

Il lemma che segue è sostanzialmente dovuto a CORDES [6], [7].

LEMMA 3. – *Sia* $b_i, c, f \in L_\infty(\Omega)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, $\sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L_\infty(\Omega)} + \|c\|_{L_\infty(\Omega)} = K_1$, $u \in H^2(\Omega)$, $Lu = f$ *q.o. in* Ω.

Allora esistono due costanti positive K_2 *e* R_0 *dipendenti da* a, n, K_1, Ω(K_2 *anche da* R) *tale che se* $S(\bar{x}, 3R) \subset \Omega$ *e* $R \leqslant R_0$ *risulti*

$$H(u, \tfrac{1}{2}, S(\bar{x}, R)) \leqslant K_2 \left[\|f\|^2_{L_\infty(S(x,3R))} + \|u\|^2_{L_2(S(x,3R))} + \|u_x\|^2_{L_2(S(x,3R))} \right]. \tag{5}$$

DIMOSTRAZIONE. – Basta rifare, con poche varianti, quella di [7]. Osserviamo innanzi tutto che non è restrittivo supporre $u \in C^2(\bar{\Omega})$, come si può facilmente verificare essendo $C^2(\bar{\Omega})$ denso in $H^2(\Omega)$. Sia $\bar{x} \in \Omega$, $S(\bar{x}, 3R_0) \subset \Omega$, $0 < R \leqslant R_0 \leqslant \frac{1}{6}$, φ una funzione tale che $\varphi \in C_0^\infty(S(\bar{x}, 3R))$, $\varphi = 1$ in $S(\bar{x}, 2R)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ in $S(\bar{x}, 3R)$.

Applicando la (33) di [7] (pag. 163) alla funzione φu si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} \int\limits_{S(\bar{x},3R)} (u\varphi)^2_{xx} |x - x_0|^{3-n} dx \leqslant K_3 \int\limits_{S(\bar{x},3R)} [L(u\varphi)]^2 |x - x_0|^{3-n} dx \, + \\ + K_4 \int\limits_{S(\bar{x},3R)} (u\varphi)^2_x |x - x_0|^{2-n} dx + K_5 \int\limits_{S(\bar{x},3R)} (u\varphi)^2 |x - x_0|^{3-n} dx \end{aligned} \tag{6}$$

ove x_0 è un punto qualunque di $S(\bar{x}, R)$ e K_3, K_4, K_5 sono costanti dipendenti da n, a, K_1, R, Ω.

Resta da maggiorare l'ultimo integrale. A tale scopo introduciamo le coordinate sferiche con origine in x_0: indicando complessivamente con θ le variabili angolari e posto $r = |x - x_0|$ risulta

$$dx = r^{n-1} f(\theta) \, dr \, d\theta$$

ove f è una opportuna funzione. Inoltre esistono un dominio $D_1 \subset R^{n-1}$ ed una funzione $r(\theta)$ tali che $S(\bar{x}, 3R) = \{(r, \theta) : \theta \in D_1, 0 \leqslant r \leqslant r(\theta)\}$. Pertanto ne segue

$$\int\limits_{S(\bar{x},3R)} (u\varphi)^2 r^{3-n} dx = \int\limits_{D_1} f(\theta) \left[\int\limits_0^{r(\theta)} (u\varphi)^2 r^2 dr \right] d\theta . \tag{7}$$

Utilizziamo ora la disuguaglianza

$$\int\limits_0^a v^2(t) \, dt \leqslant 4 \int\limits_0^a v'^2(t) \, t^2 \, dt$$

valida per ogni $a > 0$ e per ogni funzione v di classe $C^1(R)$ tale che $v(a) = 0$ (vedi lemma 14 in appendice). Da essa segue ovviamente, se $0 < a \leqslant 1$:

$$\int\limits_0^a v^2(t) \, t^2 \, dt \leqslant 4 \int\limits_0^a v'^2(t) \, t \, dt . \tag{8}$$

Poichè per ipotesi è $6R \leqslant 6R_0 \leqslant 1$ la funzione $r(\theta)$ della (7) non supera 1. Possiamo quindi applicare la (8) alla funzione $u\varphi$ essendo $u\varphi = 0$ su $\partial S(\bar{x}, 3R)$. Pertanto dalle (7), (8) segue

$$\int_0^{r(\theta)} (u\varphi)^2 r^2 dr \leqslant 4 \int_0^{r(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial r}(u\varphi)\right]^2 r\, dr \leqslant 4 \int_0^{r(\theta)} (u\varphi)_x^2 r\, dr\,. \tag{9}$$

Dalle (7), (9) si deduce allora

$$\int_{S(\bar{x},3R)} (u\varphi)^2 r^{3-n} dx \leqslant 4 \int_{D_1} f(\theta)\left[\int_0^{r(\theta)} (u\varphi)_x^2 r\, dr\right] d\theta = 4 \int_{S(\bar{x},3R)} (u\varphi)_x^2 r^{2-n} dx \tag{10}$$

e dalle (6), (10) infine

$$\int_{S(\bar{x},3R)} (u\varphi)_{xx}^2 r^{3-n} dx \leqslant K_3 \int_{S(\bar{x},3R)} [L(u\varphi)]^2 r^{3-n} dx + (K_4 + 4K_5) \int_{S(\bar{x},3R)} (u\varphi)_x^2 r^{2-n} dx\,. \tag{11}$$

La (11) è valida purchè $0 < R \leqslant R_0$ ed è formalmente identica alla (33) di [7]. Pertanto allo stesso modo di [7] ne segue

$$\int_{S(\bar{x},3R)} [(u\varphi)(x) - (u\varphi)(x_0)]^2 r^{-1-n} dx \leqslant K_6 \int_{S(\bar{x},3R)} [L(u\varphi)]^2 r^{3-n} dx + K_7 \int_{S(\bar{x},3R)} (u\varphi)^2 dx\,. \tag{12}$$

Le costanti K_6, K_7 dipendono, come le precedenti, da n, a, K_1, R, Ω. Osserviamo a questo punto che

$$\begin{aligned} L(u\varphi) &= \varphi L u - 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} + u\Big(- \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\varphi_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \varphi_{x_i}\Big) = \\ &= \varphi f + \sum_{i=1}^n \Big(-2 \sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_j} + b_i u\Big)\varphi_{x_i} - u \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\varphi_{x_i x_j}\,, \end{aligned}$$

e quindi

$$L(u\varphi) = f \qquad \text{q.o. in } S(\bar{x}, 2R)\,, \tag{13}$$

$$\|L(u\varphi)\|^2_{L_2(S(\bar{x},3R))} \leqslant K_8\big[\|f\|^2_{L_2(S(\bar{x},3R))} + \|u\|^2_{L_2(S(\bar{x},3R))} + \|u_x\|^2_{L_2(S(\bar{x},3R))}\big] \tag{14}$$

ove K_8 è una costante dipendente da n, K_1, φ (e quindi da R).

Sia ora $x_0 \in S(\bar{x}, R)$ in modo che $r = |x - x_0| \geqslant R$ se $x \in S(\bar{x}, 3R) - S(\bar{x}, 2R)$. Allora dalle (13), (14) segue

$$\begin{aligned} \int_{S(\bar{x},3R)} [L(u\varphi)]^2 r^{3-n} dx &\leqslant \int_{S(\bar{x},2R)} f^2 r^{3-n} dx + R^{3-n} \int_{S(\bar{x},3R) - S(\bar{x},2R)} [L(u\varphi)]^2 dx \leqslant \\ &\leqslant \|f\|^2_{L_\infty(S(\bar{x},3R))} \int_{S(\bar{x},2R)} r^{3-n} dx + R^{3-n} K_8\big[\|f\|^2_{L_2(S(\bar{x},3R))} + \|u\|^2_{L_2(S(\bar{x},3R))} + \|u_x\|^2_{L_2(S(\bar{x},3R))}\big] \leqslant \\ &\leqslant K_9\big[\|f\|^2_{L_\infty(S(\bar{x},3R))} + \|u\|^2_{L_2(S(\bar{x},3R))} + \|u_x\|^2_{L_2(S(\bar{x},3R))}\big] \end{aligned} \tag{15}$$

ove la costante K_9 dipende ancora soltanto da n, K_1, R.

Dalle (12), (15) si deduce

$$\sup_{x_0\in S(\bar{x},R)}\int\limits_{S(\bar{x},R)}[u(x)-u(x_0)]^2 r^{-1-n}dx\leq K_9\big[\|f\|^2_{L_\infty(S(\bar{x},3R))}+\|u\|^2_{L_2(S(\bar{x},3R))}+\|u_x\|^2_{L_2(S(\bar{x},3R))}\big]\,. \tag{16}$$

Per i risultati di CORDES [6], [7], si ha

$$H\big(u,\tfrac{1}{2},S(\bar{x},R)\big)\leq\sup_{x_0\in S(\bar{x},R)}\int\limits_{S(\bar{x},R)}[u(x)-u(x_0)]^2 r^{-1-n}dx$$

da cui la tesi. ■

LEMMA 4. – *Sia* b_i, c, $f\in L_\infty(\Omega)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $\sum_{i=1}^{n}\|b_i\|_{L_\infty(\Omega)}+\|c\|_{L_\infty(\Omega)}=K_1$, $u\in H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$, $Lu=f$ *q.o. in* Ω. *Allora esistono due costanti positive* K_{10} *e* R' *dipendenti da* a, n, K_1, Ω (K_{10} *dipende anche da* R) *tali che se* $\bar{x}\in\partial\Omega$ *e* $0<R\leq R'$ *risulti*

$$H\big(u,\tfrac{1}{2},S(\bar{x},R)\cap\Omega\big)\leq K_{10}\big[\|f\|^2_{L_\infty(S(\bar{x},3R)\cap\Omega)}+\|u\|^2_{L_2(S(\bar{x},3R)\cap\Omega)}+\|u_x\|^2_{L_2(S(\bar{x},3R)\cap\Omega)}\big]\,.$$

DIMOSTRAZIONE. – Cominciamo dal caso particolare in cui $\bar{x}\in\partial\Omega$ e $S(\bar{x},3R')\cap\Omega$ sia un insieme convesso. Allora si può procedere esattamente come nel lemma precedente: infatti se φ è una funzione scelta come all'inizio della dimostrazione del lemma 3, risulta $\varphi u\in H^1_0\big(S(\bar{x},3R)\cap\Omega\big)$ essendo u nulla su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$. D'altra parte poichè $S(\bar{x},3R')\cap\Omega$ è un insieme convesso, si possono applicare anche i risultati in [7] come nel lemma 3.

Resta da considerare il caso in cui $S(\bar{x},3R')\cap\Omega$ non sia convesso: ci si riconduce allora al caso precedente con un cambiamento di variabili (questo procedimento è già stato usato da GIUSTI [11]).

Scegliamo gli assi coordinati in modo che $\bar{x}=0$ e che il piano tangente in 0 abbia equazione $x_n=0$. Allora in un intorno U di 0 la superficie $\partial\Omega$ si può rappresentare, per l'ipotesi fatta, con una equazione del tipo $x_n=g(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ ove g è una funzione dotata di derivate seconde continue e

$$g(0)=g_{x_1}(0)=g_{x_2}(0)=\ldots=g_{x_{n-1}}(0)=0\,. \tag{17}$$

Consideriamo il cambiamento di variabili $y=\mathcal{C}(x)$ definito da

$$\begin{cases} y_i=x_i & (i=1,2,\ldots,n-1)\\ y_n=x_n-g(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\,; \end{cases} \tag{18}$$

ovviamente esso è tale che l'insieme $U'=\mathcal{C}(U\cap\Omega)$ ha una parte di frontiera contenuta nel piano $y_n=0$.

Inoltre dalle (17) e (18) e dalla scelta di g si verifica facilmente che

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(y)=\delta_{ij}(i,j=1,2,\ldots,n)\,. \tag{19}$$

Studiamo ora come si scrive l'equazione $Lu = f$ nelle nuove coordinate (18).

Posto $v(y) = u[x(y)]$, $\tilde{a}_{ij}(y) = a_{ij}[x(y)]$, $\tilde{b}_i(y) = b_i[x(y)]$, $\tilde{c}(y) = c[x(y)]$, $\tilde{f}(y) = f[x(y)]$ ove le funzioni $x(y) = \mathcal{T}^{-1}(y)$ si ricavano dalle (18), si ottiene con facili calcoli:

$$Lu[x(y)] = \left[-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i}(x) + c(x) u(x)\right]_{x=x(y)} =$$
$$= \sum_{l,r=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(y) \frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_r}{\partial x_j}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_r} + \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(y)\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i\, \partial x_j} +\right.$$
$$\left.+ \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i(y) \frac{\partial y_l}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v}{\partial y_l} + \tilde{c}(y)\, v =$$
$$= -\sum_{l,r=1}^{n} \alpha_{lr}(y) \frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_r} + \sum_{l=1}^{n} \beta_l(y) \frac{\partial v}{\partial y_l} + \gamma(y) v = \tilde{f}(y)$$

ove si è posto

$$(20)\qquad \begin{cases} \alpha_{lr}(y) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(y) \frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_r}{\partial x_j}, & (l, r = 1, 2, \ldots, n)\,. \\ \beta_l(y) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(y)\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i(y)\frac{\partial y_l}{\partial x_i} & (l = 1, 2, \ldots, n) \\ \gamma(y) = \tilde{c}(y)\,. \end{cases}$$

Ora è chiaro che $\sum_{l=1}^{n} \|\beta_l\|_{L_\infty(U')} + \|\gamma\|_{L_\infty(U')} = K_{11}$ ove K_{11} è una costante dipendente solo da K_1 e dalla funzione g della (18), cioè in definitiva da $\partial\Omega$. Inoltre per le (19), (20), (3) si può determinare un numero positivo R' tale che per ogni $y \in U' \cap S(0, 3R')$ risulti

$$(21)\qquad \left[\sum_{l,r=1}^{n} \alpha_{lr}^2(y)\right]^{-1} \geqslant a' \qquad \text{ove } a' = \frac{a+n-1}{2}\,.$$

A questo punto possiamo applicare il lemma 3 alla funzione $v(y)$ in quanto essa soddisfa tutte le ipotesi dovute: infatti si può scegliere R' in modo che l'insieme $U' \cap S(0, 3R')$ sia convesso, mentre la funzione v è soluzione di una equazione del tipo considerato nel lemma precedente.

Risulta pertanto

$$(22)\qquad H(v, \tfrac{1}{2}, U' \cap S(0, R)) \leqslant K_{12}\{\|\tilde{f}\|^2_{L_\infty(U' \cap S(0,3R))} + \|v\|^2_{L_2(U' \cap S(0,3R))} + \|v_x\|^2_{L_2(U' \cap S(0,3R))}\}$$

ove $0 < R \leqslant R'$ e K_{12} è una costante dipendente da a, n, K_1, g. Tornando alle vecchie coordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e alla funzione u, dalla (22) si deduce facilmente

$$H(u, \tfrac{1}{2}, V_R) \leqslant K_{13}\{\|f\|^2_{L_\infty(U \cap \Omega)} + \|u\|^2_{L_2(U \cap \Omega)} + \|u_x\|^2_{L_2(U \cap \Omega)}\}$$

ove $V_R = \mathcal{C}^{-1}(U' \cap S(0, R))$ e K_{13} è una costante dipendente ancora da a, n, K_1, g (e quindi $\partial\Omega$).

Si è dunque provato che u è hölderiana in un intorno di un qualunque punto della frontiera di $\partial\Omega$. ∎

COROLLARIO 5. – *Nelle stesse ipotesi del lemma precedente esiste una costante K_{13} dipendente da a, n, K_1, Ω tale che*

$$H(u, \tfrac{1}{2}, \bar{\Omega}) \leqslant K_{13}\{\|f\|^2_{L_\infty(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_x\|^2_{L_2(\Omega)}\}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. – Per i lemmi precedenti u è hölderiana di esponente $\frac{1}{2}$ in un intorno di ogni punto di $\bar{\Omega}$. Per compattezza $\bar{\Omega}$ può essere ricoperto da un numero finito di questi intorni da cui si ottiene facilmente la tesi. ∎

LEMMA 6. – *Per ogni funzione $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ sussiste la disuguaglianza*

$$\|u_x\|_{L_2(\Omega)} \leqslant K_{14}(\operatorname{mis}\Omega)^{1/n}\|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}$$

ove la costante K_{14} dipende soltanto da n (e non da Ω).

DIMOSTRAZIONE. – In [9] (pag. 488) è stato dimostrato che

$$\|u\|_{L_{2n/(n-2)}(\Omega)} \leqslant K_{14}\|u_x\|_{L_2(\Omega)} \tag{23}$$

per ogni $u \in H^1_0(\Omega)$, ove

$$K_{14} = \frac{2(n-1)}{n(n-2)\sqrt{\pi}}\left\{\frac{n}{2}\,\Gamma\!\left(\frac{n}{2}\right)\right\}^{1/n}.$$

Se $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ si ha

$$\|u_x\|^2_{L_2(\Omega)} = -\int_\Omega u\,\Delta u\,dx \leqslant \|u\|_{L_2(\Omega)}\|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}\,. \tag{24}$$

Per la diseguaglianza di Schwartz-Hölder risulta

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant (\operatorname{mis}\Omega)^{1/n}\|u\|_{L_{2n/(n-2)}(\Omega)}\,. \tag{25}$$

Dalle (23), (24), (25) si deduce immediatamente la tesi. ∎

Il seguente teorema fornisce un primo risultato di carattere locale.

TEOREMA 7. – *Sia $b_i \in L_\infty(\Omega)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $c \in L_\infty(\Omega)$, $c \geqslant 0$ q.o. in Ω, $f \leqslant 0$ q.o. in Ω, $u \in H^2(\Omega)$, $Lu = f$ q.o. in Ω.*

Esiste una costante K_{15}, dipendente soltanto dai coefficienti di L, tale che: per ogni insieme aperto convesso D contenuto in Ω, la cui frontiera sia formata da un numero finito di porzioni di superfici di classe C^2, e tale che $\operatorname{mis} D \leqslant K_{15}$, risulti

$$\operatorname*{ess\,sup}_D u \leqslant \max\,(0, \operatorname*{max^*}_{\partial D} u)\,.$$

DIMOSTRAZIONE. - Dai risultati di TALENTI ([17] pag. 286) segue che esiste una costante positiva K_{16}, dipendente solo da n e da a, tale che

$$\|u_{xx}\|_{L_2(D)} \leq K_{16} \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} \Big\|_{L_2(D)} \tag{26}$$

per ogni $u \in H^2(D) \cap H_0^1(D)$, purchè D sia un sottoinsieme di Ω la cui frontiera sia regolare e abbia curvatura media di segno costantemente non positivo, ove la normale a ∂D sia orientata verso l'esterno (se D è convesso gode di questo proprietà).

Dalle (25), (26) e dal lemma 6 (ove si sostituisca D ad Ω) si ottiene

$$\|u_x\|_{L_2(D)} \leq K_{14} (\text{mis } D)^{1/n} n \|u_{xx}\|_{L_2(D)} \tag{27}$$

$$\|u\|_{L_2(D)} \leq K_{14}^2 (\text{mis } D)^{2/n} n \|u_{xx}\|_{L_2(D)} \tag{28}$$

per ogni $u \in H^2(D) \cap H_0^1(D)$. Dalle (26), (27), (28) segue

$$\|u_{xx}\|_{L_2(D)} \leq K_{16} \|f\|_{L_2(D)} + \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L_\infty(D)} \cdot K_{14} (\text{mis } D)^{1/n} \cdot n \cdot \|u_{xx}\|_{L_2(D)} + \\ + \|c\|_{L_\infty(D)} \cdot K_{14}^2 \cdot (\text{mis } D)^{2/n} \cdot n \cdot \|u_{xx}\|_{L_2(D)} \, . \tag{29}$$

Dalla (29) si deduce che ponendo

$$K_{15} = \min \left\{ \left[2nK_{14} \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L_\infty(\Omega)} \right]^{-n}, \left[2nK_{14}^2 \|c\|_{L_\infty(\Omega)} \right]^{-n/2} \right\}$$

e supponendo mis $D \leq K_{15}$, risulta

$$\|u_{xx}\|_{L_2(D)} \leq 2K_{16} \|f\|_{L_2(D)} \qquad \forall u \in H_0^1(D) \cap H^2(D) \, . \tag{30}$$

A questo punto si procede come in [3]; darò soltanto un cenno della dimostrazione per completezza.

Prolunghiamo le funzioni a_{ij} a tutto R^n ponendole uguali a δ_{ij}/n fuori di Ω. Sia $\theta \in C_0^\infty(R^n)$, $\theta(x) = 0$ per $|x| > 1$, $\int_{R^n} \theta(x) dx = 1$. Poniamo, per $m = 1, 2, \ldots$:

$$a_{ij}^{(m)}(x) = m^n \int_{R^n} \theta(mx - my) a_{ij}(y) dy \, . \tag{31}$$

Analogamente, prolungati i coefficienti b_i, c a tutto R^n ponendoli uguali a zero fuori di Ω, sia

$$b_i^{(m)}(x) = m^n \int_{R^n} \theta(mx - my) b_i(y) dy \, , \tag{32}$$

$$c^{(m)}(x) = m^n \int_{R^n} \theta(mx - my) c(y) dy \tag{33}$$

per $i = 1, 2, \ldots, n$ e per $m = 1, 2, \ldots$.

Sia infine $L^{(m)}$ l'operatore

$$L^{(m)} = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(m)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i^{(m)} \frac{\partial}{\partial x_i} + c^{(m)} . \tag{34}$$

È facile verificare che la (30) vale anche per gli operatori $L^{(m)}$, cioè

$$\|u_{xx}\|_{L_2(D)} \leqslant 2K_{16} \|L^{(m)} u\|_{L_2(D)} \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{35}$$

per ogni $u \in H^2(D) \cap \overset{\circ}{H}{}^1_0(D)$.

Consideriamo i problemi di Dirichlet

$$\begin{cases} L^{(m)} v^{(m)} = f & \text{q.o. in } D , \\ v^{(m)} - u \in \overset{\circ}{H}{}^1_0(D) \cap H^2(D) & (m = 1, 2, \ldots) . \end{cases} \tag{36}$$

Dalla (35) segue subito che i problemi (36) ammettono una ed una sola soluzione. Inoltre per essi vale il classico principio di massimo, essendo i coefficienti di $L^{(m)}$ di classe $C^\infty(\bar{D})$. Pertanto si ha (vedi ad esempio [15])

$$\max_D v^{(m)} \leqslant \max\,(0, \max_D{}^* u) . \tag{37}$$

Dalle (35), (36) si ottiene

$$\|v_{xx}^{(m)}\|_{L_2(D)} \leqslant 2K_{16} \|f\|_{L_2(D)} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

pertanto esiste una successione estratta dalla $\{v^{(m)}\}_{m\in N}$ che converge debolmente in $H^2(D)$ ad una funzione che, tenuto conto di quanto precede, coincide con u. Dalla (37) si deduce facilmente che $u \leqslant \max\,(0, \max_D{}^* u)$ q.o. in D. ■

Il risultato che segue è dovuto a SERRIN [16].

LEMMA 8. – *Sia $c, b_i \in L_\infty(\Omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L_\infty(\Omega)} + \|c\|_{L_\infty(\Omega)} = K_1$, $c \geqslant 0$ q.o. in Ω, $x_0 \in \Omega$, $R_1 > 0$ tale che $\overline{S(x_0, R_1)} \subset \Omega$ e che* mis $S(x_0, R_1) < K_{15}$, *ove K_{15} è la costante introdotta nel teorema 7. Sia $\omega(r)$ una funzione definita per $r \geqslant 0$, nulla per $r = 0$, continua e non decrescente. Sia $\mathcal{U}$ la classe delle funzioni u che godono di tutte le seguenti proprietà:*

a) $u \in H^2(\Omega)$.

b) $Lu = 0$ *q.o. in* Ω.

c) $|u(x') - u(x'')| \leqslant \omega(|x' - x''|)$ $\forall x', x'' \in \overline{S(x_0, R_1)}$.

d) $u(x) > 0$ $\forall x \in \overline{S(x_0, R_1)}$.

Allora esiste una funzione $\varphi(t)$, *definita per* $t \geq 0$, *nulla per* $t = 0$, *continua e non decrescente, dipendente da* a, n, K_1 *e dal modulo di continuità* $\omega(\cdot)$, *tale che*

$$u(x) \leq \varphi[u(x_0)] \qquad \forall x \in S(x_0, R_1), \ \forall u \in \mathcal{U}.$$

DIMOSTRAZIONE. - Salvo lievi modifiche è la stessa di [16] (pag. 305-306) e la riporto per completezza. Non è restrittivo supporre che il punto x_0 coincida con l'origine delle coordinate $0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Sia $R_1 > 0$ tale che $\overline{S(0, R_1)} \subset \Omega$ e che mis $S(0, R_1) < K_{15}$, ove K_{15} è la costante introdotta nel teorema 7. Sia inoltre $u \in \mathcal{U}$. Allora per il teorema 7 e per il lemma 2 (applicati ad $S(0, R_1)$) esiste almeno un punto $\bar{x} \in \partial S(0, R_1)$ tale che $u(\bar{x}) = \max\{u(x) : x \in \overline{S(0, R_1)}\}$. Posto $u(\bar{x}) = h$, sia $r_0 = r_0(h) = \sup\{r : \omega(r) \leq h/2\}$. Si verifica che $r_0(h)$ è funzione non decrescente di h; risulta inoltre

$$\tfrac{1}{2}h \leq u(x) \qquad \forall x \in \overline{S(0, R_1) \cap S(\bar{x}, r_0)}. \tag{38}$$

Se $0 \in \overline{S(\bar{x}, r_0)}$, cioè se $r_0 \geq R_1$, dalla (38) segue

$$\tfrac{1}{2}h \leq u(0). \tag{39}$$

In caso contrario occorre procedere diversamente come segue. Consideriamo l'insieme D così definito:

$$D = \left\{ x : \frac{(x_1 - 3R_1)^2}{16R_1^2} + \frac{2(x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2)}{r_0^2} < 1, x_1 < R_1 - r_0^2/2R_1 \right\}.$$

Tale D è convesso, contenuto in $S(0, R_1)$, contiene 0, inoltre la parte piana della frontiera di D è contenuta in $S(\bar{x}, r_0)$.

Definiamo la funzione

$$v = v(\alpha, x) = (\exp[-\alpha\sigma^2] - \exp[-\alpha])(\exp[-\alpha/4] - \exp[-\alpha])^{-1}$$

ove α è un parametro positivo per ora arbitrario e

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - 3R_1)^2}{16R_1^2} + \frac{2(x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2)}{r_0^2}.$$

È facile verificare che risulta $v = 0$ sulla parte curva della frontiera di D e $0 < v < 1$ in D e sulla parte piana della frontiera di D. Con facili calcoli si deduce inoltre che per $x \in D$ risulta

$$Lv \leq (\exp[-\alpha/4] - \exp[-\alpha])^{-1} \exp[-\alpha\sigma^2]\left[-\frac{(1 - \sqrt{n - a})\,\alpha^2}{16R_1^2 n} + \frac{4(K_1 R_1 + 1)\alpha}{r_0^2} + K_1\right].$$

Di qui si vede che basta scegliere α abbastanza grande per avere

$$(40) \qquad Lv \leqslant 0 \quad \text{in } D$$

il che supporremo d'ora in avanti. Ad esempio si può scegliere per α il valore seguente:

$$\alpha = \frac{64nR_1^2(1 + K_1R_1)}{r_0^2(1 - \sqrt{n - a})} + 4R_1\left[\frac{K_1 n}{1 - \sqrt{n - a}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

che dipende solo da R_1, K_1, n, a, r_0 ed è funzione decrescente di r_0. Posto $w = \frac{1}{2}hv - u$, osserviamo che dalla (38) e dalle ipotesi fatte segue

$$(41) \qquad w < 0 \quad \text{su } \partial D\,.$$

Dalla (40) si ha anche ovviamente (essendo $Lu = 0$ q.o. in Ω)

$$(42) \qquad Lw \leqslant 0 \quad \text{q.o. in } D\,.$$

Allora dalle (41), (42), del teorema 7 e dal lemma 2 segue $w < 0$ in $\overline{D}$, da cui in particolare $w(0) < 0$ cioè

$$(43) \qquad \tfrac{1}{2}hv(\alpha, 0) < u(0)\,.$$

Si può osservare che $v(\alpha, 0)$ dipende soltanto da α e quindi soltanto da R_1, K_1, n, a, r_0. Inoltre a causa della (39) la (43) vale anche se $r_0 \geqslant R_1$ essendo $v(\alpha, 0) < 1$.

Studiamo ora la dipendenza di $v(\alpha, 0)$ da h attraverso r_0.

Si ha intanto

$$v(\alpha, 0) = \left(\exp[7\alpha/16] - 1\right)\left(\exp[3\alpha/4] - 1\right)^{-1}$$

da cui segue che $v(\alpha, 0)$ è una funzione monotona decrescente di α (per $\alpha > 0$).

D'altra parte essendo α funzione decrescente di r_0, ne segue che $v(\alpha, 0)$ è funzione crescente di $r_0 = r_0(h)$ e quindi funzione non decrescente di h. Detto $F(h)$ il primo membro della (43) cioè

$$F(h) = \tfrac{1}{2}hv(\alpha, 0)$$

la funzione $F(h)$ ha le seguenti proprietà: è definita per $h > 0$, positiva, crescente con h. Posto allora, per $t \geqslant 0$:

$$\varphi(t) = \inf\{h : F(h) \geqslant t\}$$

tale funzione φ è definita per $t \geqslant 0$, non decrescente, continua, nulla nell'origine. Inoltre risulta evidentemente

$$\varphi[F(h)] = h \qquad \forall h > 0\,.$$

Dalla (43) segue allora

$$h = \varphi[F(h)] \leqslant \varphi[u(0)] \qquad \forall h > 0 .$$

Tornando alle vecchie coordinate e ricordando la definizione di h si ha infine

$$u(x) \leqslant \varphi[u(x_0)] \qquad \forall x \in \overline{S(x_0, R_1)}, \ \forall u \in \mathcal{U} . \quad \blacksquare$$

4. – Risultati principali.

TEOREMA 9. – *Sia* $u \in H^2(\Omega)$, $b_i \in L_\infty(\Omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L_\infty(\Omega)} = K_1$, $L_0 u = 0$ *q.o. in* Ω. *Posto* $\mu = \operatorname{ess\,sup}_\Omega u$, *se esiste un punto* $x_0 \in \Omega$ *in cui* $u(x_0) = \mu$, *allora* u *è costante in* Ω.

DIMOSTRAZIONE. – Per il lemma 3 u è hölderiana in Ω e quindi è definita in ogni punto di Ω. Basta evidentemente far vedere che se $u(x_0) = \mu$ allora u è costante (ed uguale a μ) in un intorno di x_0.

Consideriamo le funzioni

$$w_\tau = \mu - u + \tau \qquad \text{con } 0 < \tau < 1, \ \tau \text{ costante} . \tag{44}$$

Ovviamente per tali valori di τ risulta $L_0(w_\tau) = 0$ q.o. in Ω e $w_\tau > 0$ in Ω. Sia R un numero positivo tale che $S(x_0, 3R) \subset \Omega$; allora per il Lemma 3 si ha

$$H\big(u, \tfrac{1}{2}, S(x_0, R)\big) \leqslant K_2\big[\|u_x\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}\big] \tag{45}$$

ove K_2 dipende dai coefficienti di L_0, da n e da Ω. Ciò significa che la funzione u è uniformemente continua in $S(x_0, R)$. Le funzioni w_τ $(0 < \tau < 1)$, in quanto differiscono da u per una costante, sono anch'esse uniformemente continue in $S(x_0, R)$ con un modulo di continuità indipendente da τ. Allora per il Lemma 8 esiste una funzione $\varphi(t)$, definita e continua per $t \geqslant 0$, nulla per $t = 0$, monotona non decrescente, dipendente solo da n, a, K_1 e dal modulo di continuità di u tale che

$$w_\tau(x) \leqslant \varphi[w_\tau(x_0)] \qquad \forall x \in S(x_0, R) , \qquad \forall \tau \in (0, 1) . \tag{46}$$

Poichè ovviamente è $w_\tau(x_0) = \tau$ dalla (46) segue

$$w_\tau(x) \leqslant \varphi(\tau) \qquad \forall x \in S(x_0, R) , \ \forall \tau \in (0, 1) . \tag{47}$$

Poichè φ non dipende da τ, facendo tendere τ a zero nella (47) si ottiene

$$\mu - u(x) = 0 \qquad \forall x \in S(x_0, R) . \quad \blacksquare$$

COROLLARIO 10. – *Sia* $b_i \in L_\infty(\Omega)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $f\in L_2(\Omega)$, $f\leqslant 0$ *q.o. in* Ω, $L_0 u = f$ *q.o. in* Ω. *Posto* $\mu = \operatorname{ess\,sup}_\Omega u$, *se esiste un punto* $x_0 \in \Omega$ *tale che* $\operatorname{ess\,sup}_S u = \mu$ per *ogni sfera* S *contenuta in* Ω *e contenente* x_0, *allora* u *è costante in* Ω.

DIMOSTRAZIONE. – Sia $S = S(x_0, r_0)$ di raggio r_0 tanto piccolo che si possa applicare il teorema 7 ad $S(x_0, r_0)$. È unica quindi ed esiste la soluzione w del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} L_0 w = 0 & \text{q.o. in } \Omega\,, \\ w - u \in H_0^1(S)\cap H^2(S)\,. \end{cases}$$

Per il teorema 7, essendo $L_0(u-w)\leqslant 0$ q.o. in S e $u - w\in H_0^1(S)$, risulta $u\leqslant w$ q.o. in S e quindi $\mu = \operatorname{ess\,sup}_S u = \max^*_{\partial S} u = \operatorname{ess\,sup}_S w = \max^*_{\partial S} w$. La funzione w è hölderiana in $S(x_0, r_0)$ per il lemma 3. Per il teorema 9 o w è costante (ed uguale a μ) in S oppure è $w(x) < \mu$ per ogni $x\in S$. Essendo $u\leqslant w$ q.o. in S e per la proprietà del punto x_0 (centro di S), tale seconda alternativa non si verifica, quindi w è costantemente uguale a μ in S. Poichè $u - w \in H_0^1(S)$, ne segue che $u=\mu$ su ∂S nel senso di $H^1(S)$.

Tutto ciò si può ripetere per le sfere $S(x_0, r)$ con $0<r<r_0$, pertanto $u=\mu$ su $\partial S(x_0, r)$ (nel senso di $H^1(S(x_0, r))$), per ogni $r<r_0$. Ciò basta per concludere che $u=\mu$ q.o. in S, da cui si ottiene facilmente la tesi. ■

Il corollario che segue estende il risultato precedente al caso in cui $c\geqslant 0$ q.o. in Ω.

COROLLARIO 11. – *Sia* $f\in L_2(\Omega)$, $f\leqslant 0$ *q.o. in* Ω, $b_i\in L_\infty(\Omega)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $c\in L_\infty(\Omega)$, $c\geqslant 0$ *q.o. in* Ω, $u\in H^2(\Omega)$, $Lu=f$ *q.o. in* Ω, $\mu = \operatorname{ess\,sup}_\Omega u > 0$. *Se esiste un punto* $x_0\in\Omega$ *tale che* $\operatorname{ess\,sup}_S u = \mu$ *per ogni sfera aperta* S *contenuta in* Ω *e contenente* x_0, *allora* u *è costante in* Ω.

DIMOSTRAZIONE. – Sia r_0 un numero positivo così piccolo che alla sfera $S(x_0, r_0)$ si possa applicare il teorema 7. Sia w la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lw = 0 & \text{q.o. in } S(x_0, r_0) \\ w - u\in H_0^1(S(x_0, r_0))\cap H^2(S(x_0, r_0))\,. \end{cases}$$

Tale soluzione è unica ed esiste per il teorema 7; inoltre essendo $L(u-w) = f\leqslant 0$ q.o. in $S(x_0, r_0)$ risulta

$$u\leqslant w \qquad \text{q.o. in } S(x_0, r_0)\,. \tag{48}$$

Ne segue, come nel corollario precedente

$$\mu = \operatorname*{ess\,sup}_{S(x_0,r_0)} u = \max_{\partial S(x_0,r_0)}{}^{*} u = \max_{\partial S(x_0,r_0)}{}^{*} w = \operatorname*{ess\,sup}_{S(x_0,r_0)} w\,.$$

La funzione w è hölderiana in $S(x_0, r_0)$ per il lemma 3; dico che $w(x_0) = \mu$. Se infatti fosse $w(x_0) < \mu$, per la continuità di w potrei trovare un numero positivo $r' < r_0$ tale che $w(x) < \mu$ per $x \in S(x_0, r')$, assurdo per la (48) e per l'ipotesi fatta su x_0. Ciò prova che $w(x_0) = \mu$; poichè $\mu > 0$ esiste una sfera $S(x_0, r_1)$ $(0 < r_1 \leqslant r_0)$ tale che $w(x) \geqslant 0$ in $S(x_0, r_1)$. Ne segue

$$L_0 w = Lw - cw = -cw \leqslant 0 \qquad \text{q.o. in } S(x_0, r_1)\,.$$

Allora per il corollario 10, applicato alla funzione w, risulta $w = \mu$ q.o. in $S(x_0, r_1)$; per la continuità di w in $S(x_0, r_0)$ si deduce facilmente che si può assumere $r_1 = r_0$. A questo punto si procede come nel corollario precedente: essendo $w - u \in H_0^1\big(S(x_0, r_0)\big)$ risulta $u = \mu$ su $\partial S(x_0, r_0)$ nel senso di $H^1\big(S(x_0, r_0)\big)$; potendosi sostituire ad r_0 un qualunque $r < r_0$, segue $u = \mu$ q.o. in $S(x_0, r_0)$, da cui la tesi. ■

Il seguente è uno dei principali risultati del lavoro, che risponde ad una questione lasciata in sospeso in [3].

TEOREMA 12. – *Sia* $b_i \in L_n(\Omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $c \in L_s(\Omega)$ *con* $s = 2$ *per* $n = 3$, $s > 2$ *per* $n = 4$, $s = n/2$ *per* $n \geqslant 5$, *sia* $f \in L_2(\Omega)$, $\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} c = c_0 > 0$, $w \in H^2(\Omega)$,

$$\left\{\begin{array}{l} Lu = f \quad \textit{q.o. in } \Omega\,, \\ u - w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\,. \end{array}\right. \tag{49}$$

Allora: (i) *Il problema di Dirichlet* (49) *ammette una ed una sola soluzione* u.

(ii) *Se* $f \leqslant 0$ *q.o. in* Ω *e* $w \leqslant \mu$ *su* $\partial\Omega$ *nel senso di* $H^1(\Omega)$, *allora risulta* $u \leqslant \mu$ *q.o. in* Ω.

DIMOSTRAZIONE. – (i) Si considerino gli operatori

$$M^{(m)} = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i^{(m)} \frac{\partial}{\partial x_i} + c^{(m)} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

ove le funzioni $b_i^{(m)}$, $c^{(m)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sono definite nelle (32), (33). Allora risulta $b_i^{(m)}$, $c^{(m)} \in L_\infty(\Omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots)$, $c^{(m)} \geqslant c_0$ in Ω,

$$\lim_{m \to +\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|b_i - b_i^{(m)}\|_{L_n(\Omega)} + \|c - c^{(m)}\|_{L_s(\Omega)} \right\} = 0\,.$$

Per noti teoremi (si veda ad esempio [10], [4]) ne segue

$$\lim_{m \to +\infty} \max \left\{ \|M^{(m)} v - Lv\|_{L_2(\Omega)} : \|v_{xx}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant 1,\ v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \right\} = 0\,. \tag{50}$$

In altre parole la successione di operatori $\{M^{(m)}\}_{n \in N}$ converge ad L nella topologia uniforme di $\mathfrak{L}[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); L^2(\Omega)]$.

Consideriamo i problemi di Dirichlet

$$\left\{\begin{array}{ll} M^{(m)}u^{(m)} = f \quad \text{q.o. in } \Omega, & \\ u^{(m)} - w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) & (m = 1, 2, \ldots). \end{array}\right. \tag{51}$$

Tali problemi hanno al più una soluzione, come si deduce facilmente dal corollario 11 (si tenga conto anche del lemma 2 e del corollario 5). Per la teoria di Riesz-Fredholm i problemi (51) hanno dunque una ed una sola soluzione $u^{(m)}$ (per $m = 1, 2, \ldots$).

Ciò significa che esistono gli operatori inversi $[M^{(m)}]^{-1}$ da $L_2(\Omega)$ a $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ (per $m = 1, 2, \ldots$). Lo stesso si potrebbe ovviamente ripetere per gli operatori $M^{(m)} - kI$ purchè $k < c_0$. Ne segue che gli autovalori reali degli operatori $M^{(m)}$ sono tutti maggiori o uguali a c_0. Per i risultati di [13], [3] gli operatori $M^{(m)}$ ed L hanno ciascuno un autovalore reale di minima parte reale. Pertanto si può dire che

$$\operatorname{Re} \lambda_j^{(m)} \geqslant c_0 \qquad (j = 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots), \tag{52}$$

ove $\{\lambda_j^{(m)}\}_{j \in N}$ è la successione degli autovalori di $M^{(m)}$.

Per la (50) e per noti teoremi si ha che ogni autovalore λ_j di L è il limite della successione dei corrispondenti autovalori degli operatori $M^{(m)}$:

$$\lambda_j = \lim_{m \to +\infty} \lambda_j^{(m)} \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{53}$$

Dalle (52), (53) si deduce allora

$$\operatorname{Re} \lambda_j \geqslant c_0 \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{54}$$

la quale prova che 0 non è un autovalore di L e quindi il problema (49) ammette una ed una sola soluzione u.

(ii) Per la (50) e per la prima parte del teorema gli operatori $[M^{(m)}]^{-1}$ hanno norma limitata, da $L_2(\Omega)$ a $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, uniformemente al variare di m. In altre parole esiste una costante K_{17} indipendente da m tale che risulti

$$\|z\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K_{17} \|M^{(m)} z\|_{L_2(\Omega)} \tag{55}$$

per ogni $z \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e per ogni $m = 1, 2, \ldots$

Sia $\{f_m\}_{m \in N}$ una successione di funzioni tali che: $f_m \in L_\infty(\Omega)$, $f_m \leqslant 0$ q.o. in Ω, $(m = 1, 2, \ldots)$ $\lim_{m \to \infty} \|f - f_m\|_{L_2(\Omega)} = 0$.

Poichè $w \leqslant \mu$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$, per la proposizione 1 è anche $w \leqslant \mu$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^2(\Omega)$, quindi esiste una successione di funzioni $\{w_m\}_{m \in N}$ tali che $w_m \in C^2(\bar{\Omega})$, $w_m \leqslant \mu$ su $\partial\Omega$ $(m = 1, 2, \ldots)$, $\lim_{m \to +\infty} \|w_m - w\|_{H^2(\Omega)} = 0$.

Consideriamo i problemi di Dirichlet

$$(56)\qquad \begin{cases} M^{(m)}z_m = f_m & \text{q.o. in } \Omega\,, \\ z_m - w_m \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) & (m = 1, 2, \ldots)\,. \end{cases}$$

Tali problemi ammettono una ed una sola soluzione z_m per la prima parte del presente teorema.

Dalla (56) si ottiene

$$(57)\qquad M^{(m)}[z_m - w_m] = f_m - M^{(m)}w_m \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

e dalle (55), (57)

$$(58)\qquad \|z_m - w_m\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K_{17} \|f_m - M^{(m)}w_m\|_{L_2(\Omega)} \qquad (m = 1, 2, \ldots)\,.$$

Per le (56), (57) e per il corollario 5 le funzioni $z_m - w_m$ sono hölderiane in $\bar{\Omega}$; per il lemma 2 e per il corollario 11 risulta $z_m - w_m \leqslant 0$ in $\bar{\Omega}$ e quindi $z_m \leqslant \mu$ in $\bar{\Omega}$. Dalla (58), poichè evidentemente il secondo membro è limitato al variare di m, segue l'esistenza di una successione, estratta dalla $\{z_m\}_{m\in N}$, debolmente convergente in $H^2(\Omega)$ ad una funzione z.

Dalle (56), (49) si deduce che $z = u$, soluzione del problema (49). Poichè $z_m \leqslant \mu$ $(m = 1, 2, \ldots)$ in $\bar{\Omega}$, si conclude $u \leqslant \mu$ q.o. in Ω. ■

Sussiste infine la seguente proposizione, che estende leggermente un risultato noto (vedi [8], [3], [15]...).

COROLLARIO 13. – *Le conclusioni del teorema precedente valgono anche nella ipotesi* $\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} c = 0$ *purchè per almeno un valore di* i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *risulti* $\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} b_i > -\infty$ *oppure* $\operatorname{ess\,sup}_{\Omega} b_i < +\infty$.

DIMOSTRAZIONE. – Basta far vedere che in queste ipotesi lo zero non è un autovalore di L, poichè il resto della dimostrazione è lo stesso che nel teorema precedente. Per fissare le idee supponiamo $\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} b_i > -\infty$, $z \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $Lz = 0$ q.o. in Ω: dobbiamo concludere che risulta $z = 0$ q.o. in Ω.

Poniamo $z = vz_1$, ove $z_1 = h - \exp[kx_1]$ e h, k sono costanti da determinarsi più tardi. Si ha:

$$Lz = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(z_1)_{x_i x_j} v - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_{x_i x_j} z_1 - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(z_1)_{x_i} v_{x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{n} b_i (z_1)_{x_i} v + \sum_{i=1}^{n} b_i v_{x_i} z_1 + c z_1 v = 0 \qquad \text{q.o. in } \Omega\,.$$

Dalla definizione di z_1 segue

$$(59)\qquad z_1 \Bigg[-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_{x_i x_j} + \left(\frac{2k \exp[kx_1]}{z_1} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} + \sum_{i=1}^{n} b_i\right) v_{x_i} + \\ + \left(\frac{a_{11}k^2 - b_1 k}{z_1} \exp[kx]_1 + c\right) v\Bigg] = 0 \qquad \text{q.o. in } \Omega\,.$$

Ora scegliamo la costante k in modo che sia $a_{11}k^2 - b_1 k \geq 1$ q.o. in Ω: per questo basta che sia

$$k < \frac{\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} b_1 - \sqrt{(\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} b_1)^2 + 4 \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} a_{11}}}{2 \operatorname{ess\,inf}_{\Omega} a_{11}} .$$

(Se l'ipotesi fosse stata $\operatorname{ess\,sup}_{\Omega} b_1 < +\infty$, si sarebbe dovuto prendere

$$k > \frac{\operatorname{ess\,sup}_{\Omega} b_1 + \sqrt{(\operatorname{ess\,sup}_{\Omega} b_1)^2 + 4 \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} a_{11}}}{2 \operatorname{ess\,inf}_{\Omega} a_{11}} \Biggr).$$

Poi si determina la costante h in modo che $z_1(x) \geq 1$ per ogni $x \in \bar{\Omega}$. In questo modo l'equazione (59) diventa del tipo

$$L_1 v = 0 \qquad \text{q.o. in } \Omega$$

ove i coefficienti di L_1 soddisfano le ipotesi del teorema precedente essendo, per le scelte fatte delle costanti k ed h:

$$\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} \left(\frac{a_{11}k^2 - b_1 k}{z_1} \exp[kx_1] + c \right) > 0 .$$

Dal teorema precedente segue allora $v = 0$ q.o. in Ω e quindi $z = 0$ q.o. in Ω. Ciò prova che il problema di Dirichlet (49) ammette una ed una sola soluzione.

Resta da far vedere che se $f \leq 0$ q.o. in Ω, $w \leq M$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$, la soluzione u del problema di Dirichlet (49) è tale che $u \leq M$ q.o. in Ω. Essendosi provato che 0 non è un autovalore dell'operatore L, si può procedere come nella dimostrazione del teorema precedente. ■

5. – Appendice.

LEMMA 14. – *Sia $a > 0$, $v \in C^1(R)$. Allora è*

$$\int_0^a v^2(t)\,dt \leq 4 \int_0^a v'^2(t)\,t^2\,dt + 2av^2(a) .$$

DIMOSTRAZIONE. – Sia $0 < \varepsilon < a$, $z = t^{\frac{1}{2}} v$.

Risulta allora

$$(60)\qquad \int_\varepsilon^a [z'^2 t + \tfrac{1}{4} z^2 t^{-1} - \tfrac{1}{2}(z^2)']dt = \int_\varepsilon^a v'^2 t^2 dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_\varepsilon^a \tfrac{1}{4} z^2 t^{-1} dt - \tfrac{1}{2} z^2(a) + \tfrac{1}{2} z^2(\varepsilon) = \tfrac{1}{4}\int_\varepsilon^a v^2 dt - \tfrac{1}{2} a v^2(a) + \tfrac{1}{2}\varepsilon v^2(\varepsilon)$$

da cui

$$\int_\varepsilon^a v^2 dt \leqslant 4\int_\varepsilon^a v'^2 t^2 dt - 2\varepsilon v^2(\varepsilon) + 2 a v^2(a)\,.$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ si ha la tesi. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] S. CAMPANATO, *Un risultato relativo ad equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (3), **21** (1967), pp. 701-707.

[2] M. CHICCO, *Principio di massimo forte per sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale*, Boll. Un. Mat. Ital., (3), **22** (1967), pp. 368-372.

[3] M. CHICCO, *Equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo Cordes con termini di ordine inferiore*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **85** (1970), pp. 347-356.

[4] M. CHICCO, *Solvability of the Dirichlet problem in $H^{2,p}(\Omega)$ for a class of linear second order elliptic partial differential equations*, Boll. Un. Mat. Ital., (4), **4** (1971), 374-387.

[5] M. CHICCO, *Sulle disuguaglianze negli spazi $H^{k,p}(\Omega)$*, in corso di pubblicazione su Le Matematiche (Catania).

[6] H. O. CORDES, *Über die erste ranwertaufgabe bei quasilinearen differentialgleichungen zweiter ordnung in mehr als zwei variablen*, Math. Annalen, **131** (1956), pp. 278-312.

[7] H. O. CORDES, *Zero order a priori estimates for solutions of elliptic differential equations*, Proc. Symp. Pure Math., **4** (1961), pp. 157-166.

[8] R. COURANT - D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, vol. 2, Interscience Publ., New York (1962).

[9] H. FEDERER - W. H. FLEMING, *Normal and integral currents*, Ann. of Math., (2), **72** (1960), pp. 458-520.

[10] E. GAGLIARDO, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche Mat., **7** (1958), pp. 102-137.

[11] E. GIUSTI, *Sulla regolarità delle soluzioni di una classe di equazioni ellittiche*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **39** (1967), pp. 362-375.

[12] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD - G. POLYA, *Inequalities*, University Press, Cambridge (1934).

[13] M. G. KREĬN - M. A. RUTMAN, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, Amer. Math. Soc. Transl., (1), **10** (1962), pp. 199-325.

[14] O. A. LADYZHENSKAYA - N. N. URAL'TSEVA, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York (1968).

[15] M. H. PROTTER - H. F. WEINBERGER, *Maximum principles in differential equations*, Prentice Hall Publ., Englewood Cliffs (1967).
[16] J. SERRIN, *On the Harnack inequality for linear elliptic equations*, J. Analyse Math., **4** (1954-56), pp. 292-308.
[17] G. TALENTI, *Sopra una classe di equazioni ellittiche a coefficienti misurabili*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **69** (1965), pp. 285-304.
[18] G. TALENTI, *Equazioni lineari ellittiche in due variabili*, Matematiche (Catania), **21** (1966), pp. 339-376.

Colgo l'occasione per correggere alcuni errori di stampa in cui sono incorso nel mio precedente lavoro [3].

	in luogo di	*leggasi*
pag. 351 riga 4 dal basso	$m^{-n}\int_{R^n} \vartheta\left(\frac{x-y}{m}\right) a_{ij}(y)\,dy$	$m^n \int_{R^n} \vartheta(mx-my)\, a_{ij}(y)\,dy$
pag. 351 riga 3 dal basso	debole	debole *
pag. 354 riga 5 dal basso	$k \geqslant 1$	$k \geqslant 2$
pag. 355 riga 1 dall'alto	$k > 1$	$k \geqslant 2$