Estratto da "*Le Matematiche*", Vol. XXVIII, Fasc. 1 (1973)

Sulle disuguaglianze negli spazi $H^{k,p}(\Omega)$

MAURIZIO CHICCO (*) (**)

SUMMARY. — *Some questions concerning inequalities on $\partial\Omega$ for the functions of the Sobolev spaces $H^{k,p}(\Omega)$ are considered.*

1. *Introduzione.*

In vari lavori sulle equazioni differenziali alle derivate parziali lineari ellittiche del secondo ordine di tipo variazionale (vedi ad esempio [8], [9]) si considerano le disuguaglianze « nel senso di $H^{1,2}(\Omega)$ ».

In altri casi, specialmente per le equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale, in cui lo spazio naturale delle soluzioni è $H^{2,2}(\Omega)$, si possono considerare disuguaglianze « nel senso di $H^{2,2}(\Omega)$ » (vedi ad esempio [4], [5]). Scopo della presente nota è descrivere alcune proprietà delle disuguaglianze negli spazi $H^{k,p}(\Omega)$. Il risultato principale afferma che (sotto opportune ipotesi su $\partial\Omega$) le disuguaglianze su $\partial\Omega$ nel senso di $H^{1,p}$ sono equivalenti a quelle nel senso di $H^{k,p}(\Omega)$ per le funzioni di tale spazio (teorema 8). Le dimostrazioni seguono in gran parte procedimenti noti (vedi [1], [7], ...) e non utilizzano la nozione di traccia su $\partial\Omega$.

Debbo infine osservare che alcuni risultati (ad esempio il teorema 7) si possono dedurre, almeno per qualche valore di k, da un lavoro di Browder ([3] lemma 9 e lemma 10, pag. 48 e 50).

(*) Entrato in redazione il 10-1-1973

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del « Centro di Matematica e Fisica Teorica » del C. N. R. presso l'Università di Genova.

2. *Notazioni ed ipotesi.*

Nel corso del lavoro, salvo avviso contrario, saranno sottointese le ipotesi seguenti. Sia k un numero naturale e p un numero reale maggiore di 1. Sia Ω un insieme aperto limitato e connesso di R^n, con $n \geq 2$. Supponiamo che la frontiera di Ω (indicata con $\partial\Omega$) sia rappresentabile localmente come grafico di una funzione continua con le derivate fino all'ordine k.

Sia $H^{k,p}(\Omega)$ lo spazio di Banach (sui reali) ottenuto completando $C^k(\overline{\Omega})$ secondo la norma

$$\| u \|_{H^{k,p}(\Omega)} = \| u \|_{L_p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{k} \| D_j u \|_{L_p(\Omega)}$$

ove la somma a secondo membro va estesa a tutte le possibili derivate di ordine $\leq k$ (Dai risultati di [7] segue che eseguendo il completamento di $C^\infty(\overline{\Omega})$ rispetto alla stessa norma si otterrebbe lo stesso spazio).

Sia $H^{k,p}(\Omega, \partial\Omega)$ il sottospazio di $H^{k,p}(\Omega)$ così definito:

$H^{k,p}(\Omega, \partial\Omega) =$ completamento in $H^{k,p}(\Omega)$ di

$$\{v : v \in C^k(\overline{\Omega}), v = 0 \text{ su } \partial\Omega\}.$$

Posto

$$H_0^{1,p}(\Omega) = \text{completamento in } H^{1,p} \text{ di } C_0^1(\Omega)$$

(ove $C_0^1(\Omega)$ indica il sottospazio delle funzioni di $C^1(\overline{\Omega})$ aventi supporto compatto in Ω), dai risultati di [8] si deduce facilmente che

$$H_0^{1,p}(\Omega) = H^{1,p}(\Omega, \partial\Omega)$$

Sia $u \in H^{k,p}(\Omega)$, B un sottoinsieme compatto di $\overline{\Omega}$, a una costante reale.

Si dice che $u \leq a$ in B nel senso di $H^{k,p}(\Omega)$ se esiste una successione $\{u_j\}_{j\in N} \subset C^k(\overline{\Omega})$ tale che

$$u_j \leq a \text{ in } B \ (j = 1, 2, \dots) \text{ e } \lim_j \| u - u_j \|_{H^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

In modo analogo si definisce $u = a$ oppure $u \geq a$ in B nel senso di $H^{k,p}(\Omega)$.

Dai risultati di [8], [9] si ottiene:

PROPOSIZIONE. *Sia* $u \in H^{1,p}(\Omega)$. *Le seguenti condizioni sono equivalenti* :

(i) $u \leq 0$ *su* $\partial\Omega$ *nel senso di* $H^{1,p}(\Omega)$ *e* $u \geq 0$ *su* $\partial\Omega$ *nel senso di* $H^{1,p}(\Omega)$:

(ii) $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$.

La stessa equivalenza per le funzioni di $H^{k,p}(\Omega)$ $(k \geq 2)$ risulterà dal seguito.

È quasi superfluo osservare che tutto quanto si dimostrerà per le disuguaglianze del tipo « $u \leq 0$ » si potrebbe ripetere per quelle del tipo « $u \leq a$ » oppure « $u \geq a$ » (a costante reale).

3. *Lemmi preliminari.*

LEMMA 1. *Sia* $u \in H^{k,p}(\Omega)$, $\mathcal{T}$ *una trasformazione di coordinate definita in un intorno di* $\overline{\Omega}$, *invertibile e continua con le derivate fino all'ordine* k. *Sia* $\Omega_1 = \mathcal{T}(\Omega)$, $u_1 = u(\mathcal{T}^{-1})$. *Allora è* $u_1 \in H^{k,p}(\Omega_1)$.

DIMOSTRAZIONE: vedi ad esempio [7] teorema I. V). ∎

OSSERVAZIONE. Il lemma precedente vale, con identica dimostrazione, sostituendo $H^{k,p}(\Omega, \partial\Omega)$ al posto di $H^{k,p}(\Omega)$.

LEMMA 2. *Sia* $u \in H^{k,p}(\Omega)$, *sia* B *un sottoinsieme compatto di* $\overline{\Omega}$ *e supponiamo che per ogni punto* $x \in B$ *esista un intorno aperto* $A = A(x)$ *tale che* $u \leq 0$ *in* $\overline{A(x) \cap B}$ *nel senso di* $H^{k,p}(\Omega \cap A(x))$.

Allora è $u \leq 0$ *in* B *nel senso di* $H^{k,p}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE: per partizione dell'unità. Poiché B è compatto esistono un numero finito r di intorni aperti $A_1, A_2, \dots, A_r$ tali che $B \subset \bigcup_{i=1}^{r} A_i$ e per i quali vale la proprietà detta sopra. Sia poi Ω' un aperto contenente $\overline{\Omega}$ e poniamo $A_{r+1} = \Omega' - B$.

Allora risulta

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{r+1} A_i .$$

Consideriamo una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $A_1, A_2, \dots, A_{r+1}$, cioè delle funzioni $\alpha_i (i = 1, 2 \dots, r+1)$ tali che: $\alpha_i \in C_0^\infty(A_i)$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$ $(i = 1, 2, \dots, r+1)$, $\sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i \equiv 1$ in $\overline{\Omega}$. Per le ipotesi fatte per ogni $i = 1, 2, \dots, r+1$ esiste una successione $\{\varphi_{j,i}\}_{j \in N} \subset C^k(\overline{\Omega \cap A_i})$ tale che

$$\lim_j \| u - \varphi_{j,i} \|_{H^{k,p}(\Omega \cap A_i)} = 0.$$

Inoltre è

$$\varphi_{j,i} \leq 0 \text{ in } B \text{ se } i \leq r \qquad (j = 1, 2, \dots).$$

Risulta poi

$$\left\| \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i \varphi_{j,i} - u \right\|_{H^{k,p}(\Omega)} = \left\| \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i (\varphi_{j,i} - u) \right\|_{H^{k,p}(\Omega)} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{r+1} \| \alpha_i (\varphi_{j,i} - u) \|_{H^{k,p}(\Omega \cap A_i))} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{s=0}^{k} K(s) \| \alpha_i \|_{H^{s,p}(\Omega \cap A_i)} \| \varphi_{j,i} - u \|_{H^{k-s,p}(\Omega \cap A_i)} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{s=0}^{k} K(s) \| \alpha_i \|_{H^{s,p}(\Omega \cap A_i)} \| \varphi_{j,i} - u \|_{H^{k,p}(\Omega \cap A_i)}$$

ove $K(s)$ $(s = 0, 1, \dots, k)$ sono costanti dipendenti solo da s, p, n.

Pertanto dalla (1) segue

$$\lim_{j \to +\infty} \left\| \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i \varphi_{j,i} - u \right\|_{H^{k,p}(\Omega)} = 0;$$

inoltre per costruzione è

$$\sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i \varphi_{j,i} \leq 0 \text{ in } B,$$

da cui la tesi. ■

Naturalmente risultati analoghi valgono sostituendo alla disuguaglianza « $u \leq 0$ » l'uguaglianza « $u = 0$ ». In particolare prendendo $B = \partial\Omega$ si ha il

COROLLARIO 3. *Sia $u \in H^{k,p}(\Omega)$ e supponiamo che per ogni punto $x \in \partial\Omega$ esista un intorno $A = A(x)$ tale che $u = 0$ in $\overline{\partial\Omega \cap A(x)}$ nel senso di $H^{k,p}(\Omega \cap A(x))$.*

Allora è $u \in H^{k,p}(\Omega, \partial\Omega)$.

Il seguente risultato estende in parte la proposizione 1.2 di [8].

LEMMA 4. *Sia* $u \in H^{k,p}(\Omega)$, B *un sottoinsieme compatto di* $\overline{\Omega}$ *ed esista un aperto* Ω^* *tale che* $B \subset \Omega^*$ *e* $u \leq 0$ *q. o. in* $\Omega \cap \Omega^*$.

Allora risulta $u \leq 0$ *in* B *nel senso di* $H^{k,p}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. Per il lemma precedente basta far vedere che per ogni punto $x_0 \in B$ esiste un intorno (aperto) $A(x_0)$ tale che $u \leq 0$ in $\overline{B \cap A(x_0)}$ nel senso di $H^{k,p}(\Omega \cap A(x_0))$. Sia ϑ una funzione tale che

$$\vartheta \in C_0^\infty(R^n),\ \vartheta(x) = 0 \text{ per } |x| > 1,\ 0 \leq \vartheta \leq 1,\ \int_{R^n} \vartheta(x)\, dx = 1.$$

Dopo aver prolungato la funzione u ponendola uguale a zero fuori di Ω, definiamo le funzioni

$$u_m(x) = m^n \int_{R^n} \vartheta(mx - my)\, u(y)\, dy \qquad (m = 1, 2, \dots) \tag{2}$$

Per noti teoremi (vedi ad esempio [1], [7], ...) per ogni aperto D tale che $\overline{D} \subset \Omega$ risulta

$$\lim_{m \to +\infty} \| u - u_m \|_{H^{k,p}(D)} = 0. \text{ Pertanto se } x_0 \in B,\ x_0 \notin \partial\Omega,$$

si può scegliere $\overline{A(x_0)} \subset \Omega \cap \Omega^*$ ed essendo

$$\lim_{m \to +\infty} \| u - u_m \|_{H^{k,p}(A(x_0))} = 0,\ u_m \leq 0 \text{ in } \overline{A(x_0)} \text{ per la (2)}$$

si conclude che $u \leq 0$ in $\overline{A(x_0)}$ nel senso di $H^{k,p}(A(x_0))$.

Sia ora $x_0 \in B \cap \partial\Omega$: procediamo allora come in [1], [7] (teorema 2. I).

Per le ipotesi fatte su $\partial\Omega$ si può affermare qnanto segue: esistono un vettore $y \in R^n$ ed un intorno opportuno $A(x_0)$ tale che sia

$$\xi + ty \in \Omega \cap \Omega^*, \qquad \forall t \in (0, 1), \qquad \forall \xi \in \partial\Omega \cap A(x_0). \tag{3}$$

Sia ε un numero positivo arbitrario e sia $0 < r < 1$.

Poniamo

$$A_r = \{x : x = \xi + ty, \quad \xi \in \partial\Omega \cap A(x_0), r/2 < t < r\},$$

$$A'_r = \{x : x = \xi + ty, \quad \xi \in \partial\Omega \cap A(x_0)\}, 0 < t < r/2\},$$

(4) $$v(r)(x) = u(x + ry/2)$$

È chiaro che $x \in A'_r$ se e solo se $x + ry/2 \in A_r$.

Per note proprietà delle funzioni sommabili esiste un numero $r_0 > 0$ dipendente da $\varepsilon, u, y, \Omega$ tale che per ogni r con $0 < r < r_0$ risulti

(5) $$\| u - v(r) \|_{H^{k,p}(A'_r)} < \varepsilon.$$

Poiché $\overline{A}_r \subset \Omega^* \cap \Omega$, per la parte già dimostrata del lemma esiste una funzione $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi \leq 0$ in $\overline{A}_r$, tale che

(6) $$\| u - \varphi \|_{H^{k,p}(A_r)} < \varepsilon.$$

Posto

(7) $$\varphi(r)(x) = \varphi(x + ry/2) \qquad \forall x \in A'_r,$$

dalle (4), (6), (7) segue

(8) $$\| v(r) - \varphi(r) \|_{H^{k,p}(A'_r)} = \| u - \varphi \|_{H^{k,p}(A_r)}$$

e dalle (5) (8) infine

(9) $$\| u - \varphi(r) \|_{H^{k,p}(A'_r)} < 2\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε ciò prova che $u \leq 0$ in A'_r nel senso di $H^{k,p}(A'_r)$. Quindi $u \leq 0$ nel senso di $H^{k,p}$ in un intorno di ogni punto di B, e per il lemma precedente $u \leq 0$ in B nel senso di $H^{k,p}(\Omega)$. ∎

COROLLARIO 5. *Sia $u \in H^{k,p}(\Omega)$, $u \leq 0$ q.o. in Ω. Allora risulta $u \leq 0$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^{k,p}(\Omega)$.*

COROLLARIO 6. *Sia* $u \in H^{k,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. *Allora* $u \leq 0$ *su* $\partial\Omega$ *nel senso di* $H^{k,p}(\Omega)$ *se e solo se* $u(x) \leq 0$ *per ogni* $x \in \partial\Omega$.

DIMOSTRAZIONE. (i) $u \leq 0$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^{k,p}(\Omega)$ implica $u(x) \leq 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$. Per assurdo supponiamo che esista un punto $\bar{x} \in \partial\Omega$ tale che $u(\bar{x}) > 0$. Allora per la supposta continuità di u in $\overline{\Omega}$ esiste tutto un intorno sferico $S = \{x : |x - \bar{x}| < \delta\}$ tale che $u(x) \geq \varepsilon$ per ogni $x \in \partial\Omega \cap S$ ove ε è una costante positiva opportuna.

Poiché $\partial\Omega$ è sufficientemente regolare, la capacità rispetto ad Ω equivale alla capacità ordinaria (vedi [6]) e inoltre risulta cap $(S \cap \partial\Omega) > 0$.

Basta infatti osservare che la capacità di una superficie $(n-1)$-dimensionale sferica o piana è positiva e che $\partial\Omega$ può essere localmente messa in corrispondenza regolare con una porzione di superficie sferica.

Pertanto si avrebbe che la funzione u è strettamente positiva in un sottoinsieme di $\partial\Omega$ avente capacità positiva, mentre per i risultati di [6], essendo $u \leq 0$ su $\partial\Omega$ nel senso di ($H^{k,p}(\Omega)$ ed in particolare di) $H^{1,p}(\Omega)$, deve essere $u \leq 0$ su $\partial\Omega$ q.o. nel senso della capacità : assurdo.

(*ii*) $u(x) \leq 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$ implica $u \leq 0$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^{k,p}(\Omega)$.

Per ogni $\varepsilon > 0$, essendo $u \in C^0(\overline{\Omega})$, esiste un numero $\delta > 0$ tale che sia $u(x) \leq \varepsilon$ per ogni $x \in \Omega_\delta$, ove

$$\Omega_\delta = \{x : x \in \Omega,\ \text{dist}\,(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Dal lemma 4 segue allora che $u \leq \varepsilon$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^{k,p}(\Omega)$, e dall'arbitrarietà di ε si ha la tesi. ■

4. *Risultati principali.*

TEOREMA 7. $H^{k,p}(\Omega, \partial\Omega) = H^{k,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. Per quanto già visto nel paragrafo 2, basta supporre $k \geq 2$.

Inoltre l'inclusione $H^{k,p}(\Omega, \partial\Omega) \subset H^{k,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega)$ è evidente, quindi basta dimostrare che $H^{k,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega) \subset H^{k,p}(\Omega, \partial\Omega)$.

Sia dunque $u \in H^{k,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega)$ e facciamo vedere che ne segue $u \in H^{k,p}(\Omega, \partial\Omega)$.

Per il corollario 3 basta dimostrare che per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ esiste un intorno (aperto) $A(x_0)$ tale che $u = 0$ su $\partial\Omega \cap A(x_0)$ nel senso di $H^{k,p}(\Omega \cap A(x_0))$.

Per il lemma 1 e per le ipotesi fatte su $\partial\Omega$ si può supporre che $\partial\Omega$ coincida, in vicinanza del punto x_0, con l'iperpiano $\{x : x \in R^n, x_n = 0\}$.

Posto

$$S_t = \{x : x \in R^n, |x - x_0| < t\}, \quad S_t^+ = S_t \cap \{x : x_n > 0\},$$

sia R un numero positivo tale che $\partial\Omega \cap S_{2R} \subset \{x : x_n = 0\}$.

Per quanto visto sopra basterà dimostrare che $u = 0$ su $S_R \cap \{x : x_n = 0\}$ nel senso di $H^{k,p}(S_R^+)$.

Sia φ una funzione tale che

$$\varphi \in C_0^\infty(S_{2R}), \ \varphi \equiv 1 \text{ in } S_R ;$$

poiché

$$u \in H^{k,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega)$$

ne segue

$$\varphi u \in H^{k,p}(S_{2R}^+) \cap H_0^{1,p}(S_{2R}^+).$$

Esiste pertanto una successione

$$\{\psi_j\}_{j \in N} \subset C^\infty(\overline{S_{2R}^+})$$

tale che

$$\lim_j \|\psi_j - \varphi u\|_{H^{k,p}(S_{1R}^+)} = 0.$$

Consideriamo i problemi di Dirichlet

$$(10) \qquad \begin{cases} \Delta w_j = \Delta \psi_j \text{ in } S_{2R}^+ , \\ w_j = 0 \text{ su } \partial S_{2R}^+ . \end{cases}$$

Le funzioni w_j, soluzioni di (10), per noti risultati (vedi ad esempio [2] teor. 15.1 tenendo presenti le proprietà degli spazi $H^{k,p}$, vedi [7]) appartengono a $C^\infty(\overline{S_{2R}^+})$; inoltre esiste una costante K indipendente da i tale che

$$(11) \qquad \|w_i\|_{H^{k,p}(S_{2R}^+)} \leq K \|\Delta\psi_i\|_{H^{k,p}(S_{2R}^+)} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

La (11) mostra che la successione $\{w_j\}_{j\in N}$ è limitata in $H^{k,p}(S_{2R}^+)$, pertanto ammette un'estratta debolmente convergente in $H^{k,p}(S_{2R}^+)$ ad una funzione u_1.

Tale funzione u_1 si può ottenere, per un noto teorema di Banach, anche come limite forte in $H^{k,p}(S_{2R}^+)$ di una successione di opportune medie convesse delle funzioni $w_j\,(j = 1, 2\,...)$.

Ne segue che $u_1 \in H^{k,p}(S_{2R}^+, \partial S_{2R}^+)$. Allora passando al limite per $j \to +\infty$ nella (10) si ottiene

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta u_1 = \Delta(\varphi u) \quad \text{in } S_{2R}^+, \\ u_1 \in H^{k,p}(S_{2R}^+, \partial S_{2R}^+), \end{array}\right. \tag{12}$$

ed essendo $\varphi u \in H^{k,p}(S_{2R}^+) \cap H_0^{1,p}(S_{2R}^+)$ se ne deduce

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta(u_1 - \varphi u) = 0 \quad \text{in } S_{2R}^+, \\ u_1 - \varphi u \in H^{2,p}(S_{2R}^+) \cap H_0^{1,p}(S_{2R}^+). \end{array}\right. \tag{13}$$

Poiché per noti risultati il problema di Dirichlet (13) ammette solo la soluzione nulla, si conclude che $\varphi u = u_1$, da cui $\varphi u = 0$ su S_{2R}^+ nel senso di $H^{k,p}(S_{2R}^+)$ ed in particolare, essendo $\varphi \equiv 1$ in S_R, $u = 0$ su $S_R \cap \{x\,; x_n = 0\}$ nel senso di $H^{k,p}(S_R^+)$. ∎

TEOREMA 8. *Sia $u \in H^{k,p}(\Omega)$, $u \leq 0$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^{1,p}(\Omega)$. Allora risulta $u \leq 0$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^{k,p}(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE. Anche in questo caso è sufficiente supporre $k \geq 2$.

Sia w la soluzione del problema di Dirichlet

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta w = \Delta u \text{ in } \Omega, \\ w \in H^{2,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega). \end{array}\right. \tag{14}$$

La soluzione w esiste ed è unica; per i risultati di [2] e per il teorema precedente è anche $w \in H^{k,p}(\Omega, \partial\Omega)$. Ne segue che $u - w \in H^{k,p}(\Omega)$, $\Delta(u - w) = 0$, $u - w \leq 0$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^{1,p}(\Omega)$. Verifichiamo che ciò implica $u - w \leq 0$ q. o. in Ω.

Sia $\{g_j\}_{j\in N}$ una successione di funzioni di $C^\infty(\overline{\Omega})$ tali che $g_j \leq 0$ su $\partial\Omega\,(j = 1, 2, ...)$ e

$$\lim_{j\to+\infty} \| g_j - (u - w) \|_{H^{1,p}(\Omega)} = 0. \tag{15}$$

Siano poi $z_j\,(j = 1, 2, \dots)$ le soluzioni dei problemi di Dirichlet

$$(16)\qquad \begin{cases} \Delta z_j = 0 & \text{in } \Omega, \\ z_j - g_j = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \dots)$$

Per il classico principio di massimo è $z_j \leq 0$ in $\bar{\Omega}$ per $j = 1, 2, \dots$. Inoltre risulta

$$(17)\qquad \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} (z_j - g_j)_{x_i} v_{x_i}\, dz = \\ = - \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} (g_j)_{x_i} v_{x_i}\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} (u - w - g_j)_{x_i} v_{x_i}\, dx$$

per ogni $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Essendo

$$(18)\qquad \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} (u - w - g_j)_{x_i} v_{x_i}\, dx \right| \leq \| (u - w - g_j)_x \|_{L_p(\Omega)} \| v_x \|_{L_q(\Omega)}$$

ove $q = p/(p-1)$ dalle (15), (17), (18) segue che

$$(19)\qquad \lim_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} (z_j - g_j)_{x_i} v_{x_i}\, dx = 0$$

per ogni $v \in H_0^{1,q}(\Omega)$ e quindi in particolare per ogni $v \in H_0^{1,q}(\Omega) \cap H^{2,q}(\Omega)$. La (19) è equivalente alla

$$\lim_{j \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} (z_j - g_j)\, \Delta v\, dx = 0$$

per ogni $v \in H_0^{1,q}(\Omega) \cap H^{2,q}(\Omega)$, la quale a sua volta equivale alla

$$(20)\qquad \lim_{j \to +\infty} \int_{\Omega} (z_j - g_j) f\, dx = 0 \qquad \forall f \in L_q(\Omega)$$

poiché il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v = f & \text{q. o. in } \Omega, \\ v \in H_0^{1,q}(\Omega) \cap H^{2,q}(\Omega) \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione per ogni $f \in L_q(\Omega)$.

Ciò prova che la successione $\{z_j - g_j\}_{j \in N}$ converge debolmente a zero in $L_p(\Omega)$; poiché $\{g_j\}_{j \in N}$ converge a $u - w$ in $H^{1,p}(\Omega)$ e $z_j \leq 0$ in $\overline{\Omega}$ $(j = 1, 2, \dots)$, si conclude che $\{z_j\}_{j \in N}$ converge ad $u - w$ debolmente in $L_p(\Omega)$ e quindi $u - w \leq 0$ q. o. in Ω

Per il corollario 5 ne segue $u - w \leq 0$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^{k,p}(\Omega)$, ed essendo $w \in H^{k,p}(\Omega, \partial\Omega)$ si conclude che $u \leq 0$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^{k,p}(\Omega)$. ∎

OSSERVAZIONE. L'ipotesi che la frontiera di Ω sia di classe C^k si è assunta in tutto il lavoro per comodità, ma alcuni risultati valgono anche in ipotesi minori. Ad esempio per il lemma 4, come è chiaro dalla dimostrazione, è sufficiente che $\partial\Omega$ goda della « proprietà del segmento » (vedi [1] pag. 11).

Per il corollario 6 basterebbe supporre ad esempio $\partial\Omega$ localmente lipschitziana. Il problema di ridurre al minimo le ipotesi su $\partial\Omega$ negli altri enunciati per quanto mi risulta è aperto

BIBLIOGRAFIA

[1] Agmon, S.: *Lectures on elliptic boundary value problems.* Van Nostrand, New York (1965)

[2] Agmon, S.: Douglis, A.; Nirenberg, L.: *Estimates near the boundary of solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I.* Comm. Pure Appl. Mat. **12** (1959), 623-727.

[3] Browder, F. E.: *On the spectral theory of elliptic differential operators, I.* Math. Annalen **142** (1961), 22-130.

[4] Chicco, M.: *Equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo Cordes con termini di ordine inferiore.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **85** (1970) 347-356.

[5] Chicco, M.: *Principio di massimo per soluzioni di equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo Cordes.* (In corso di pubblicazione).

[6] Chicco, M.: *Confronto tra due modi di definire le disuguaglianze per le funzioni di* $H^{1,p}(\Omega)$. Boll. Un. Mat. Ital. (4) **4** (1971), 668-676.

[7] Gagliardo, E.: *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili.* Ricerche Mat. **7** (1958), 102-137.

[8] Littman, W.; Stampacchia, G.; Weinberger, H. F.: *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **17** (1963), 43-77.

[9] Stampacchia, G.: *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **15**, 1 (1965), 189-258.

TIPOGRAFIA ODERISI EDITRICE - GUBBIO - 1973