

Esercizio 1. Sia data la successione

$$a_n := \sqrt{\ln(n^2 + 2n + e)} - \sqrt{2\ln(n+1)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

- a) Stabilire se la successione è limitata;
- b) stabilire se la successione è monotona ed, in caso affermativo, di che tipo;
- c) posto $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, calcolare, se esistono, $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$, $\lim_n a_n$;
- d) calcolare, se esiste, $\lim_n n^3 a_n$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \arctan x^3}} & \text{se } x > 0 \\ \frac{3}{\pi} \arctan(x+a) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

essendo a un parametro reale.

- 1) È vero che f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$? Se sì perché?
- 2) Stabilire per quali valori del parametro a (se ce ne sono) la funzione è continua in 0.
- 3) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ calcolare (se esistono) i limiti di f per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$.
- 4) Stabilire se esistono valori del parametro a per i quali f risulti sia continua in \mathbb{R} sia iniettiva.