Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) := \begin{cases} k[\sin(\pi^2 x) - \pi^2 x/4 + \pi/4] & \text{se } x \leq 1/\pi \\ \pi/(\pi x + 1) - \sin(1/x) - (\pi/2)e^{-(x-1/\pi)^2} & \text{se } x > 1/\pi \end{cases}$$

essendo k un parametro reale.
a) Stabilire per quali valori reali di k (se ce ne sono) la funzione f è continua in $\mathbb{R}$.
b) Stabilire per quali valori reali di k (se ce ne sono) la funzione f è derivabile in $\mathbb{R}$.
c) Stabilire per quali valori reali di k (se ce ne sono) la funzione f ammette derivata seconda in $\mathbb{R}$.
d) Calcolare (se esiste) l'ordine di infinitesimo di f per $x \to +\infty$. (Suggerimento: considerare il cambiamento di variabili $t = 1/x$).

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione di variabile reale definita da

$$f(x) := \ln(1 + x^2) + \alpha \arctan x \quad (\text{con } \alpha \in \mathbb{R})$$

1) È vero che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$?
2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, calcolare (se esistono) i limiti di f per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$;
3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, studiare la monotonia di f, stabilire se f ammette massimo e/o minimo assoluto, determinare tutti gli eventuali punti di estremo assoluto di f, precisando, per ciascuno di essi, se si tratti di un punto di massimo o di minimo assoluto;
4) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, stabilire quanti sono (se ne esistono) gli zeri di f.