Esercizio 1. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ sia f_n la funzione reale di una variabile reale definita da

$$f_n(x) = \frac{\cos(x^n) - 1 + x^n \ln|x|}{x \operatorname{arctg} x}.$$

(a) Al variare di $n \in \mathbb{Z}$ determinare il dominio D_n di f_n.

(b) Stabilire per quali $n \in \mathbb{Z}$ la funzione f_n è continua su D_n.

(c) Determinare i valori di $n \in \mathbb{Z}$ per i quali f_n è prolungabile ad una funzione continua definita su tutto $\mathbb{R}$. Per tali valori di $n \in \mathbb{Z}$ determinare un prolungamento continuo di f_n su $\mathbb{R}$ e denotarlo con g_n.

(d) Per i valori di $n \in \{0, 2, 4\}$ per i quali f_n è prolungabile ad una funzione continua definita su tutto $\mathbb{R}$, stabilire se la funzione g_n introdotta nel punto (c) è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Sia α un parametro reale e siano date le funzioni

$$f_\alpha(x) := \int_1^x g_\alpha(t)\,dt, \qquad g_\alpha(t) := \begin{cases} \dfrac{\sin(1/t)}{\ln|t|} & \text{se } t < 0 \\ \dfrac{e^t - \alpha}{\sqrt[3]{\arctan t - \pi/4}} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Sulla base della teoria degli integrali impropri, rispondere alle seguenti domande al variare del parametro α:

(a) determinare l'insieme di definizione D_α di f_α;

(b) determinare l'insieme dei punti di derivabilità di f_α;

(c) stabilire se esiste $f''_\alpha(0)$;

(d) stabilire se esistono i limiti di f_α agli estremi di D_α, precisando, in caso di esistenza, se sono finiti oppure no;

(e) stabilire se f_α è monotona in D_α.