Bollettino U. M. I.
(5) **13**-A (1976), 637-646

Comportamento asintotico degli autovalori degli operatori ellittici del secondo ordine di tipo variazionale.

MAURIZIO CHICCO (Genova) (*)

Summary. – *I study the asymptotic behaviour of the eigenvalues of the Dirichlet problem for linear second order elliptic partial differential equations in divergence form with discontinuous coefficients. Such a behaviour is compared with that of the Laplace equation.*

1. – Introduzione.

La letteratura sul comportamento asintotico degli autovalori del problema di Dirichlet per equazioni ellittiche è molto vasta, a partire dai classici lavori di WEYL [2] e CARLEMAN [6] fino ai più recenti di AGMON [1], [2], BEALS [3], [4] e CLARK [10] ai quali rimando per ulteriore bibliografia. Questi autori hanno provato tra l'altro che gli autovalori di una vasta classe di equazioni ellittiche del secondo ordine hanno lo stesso comportamento asintotico di quelli dell'equazione di Laplace.

Scopo del presente lavoro è estendere in parte tale risultato alle equazioni ellittiche del secondo ordine, di tipo variazionale, a coefficienti discontinui e non autoaggiunte (studiate da STAMPACCHIA in [18]), le quali in generale non rientrano nelle classi di equazioni considerate dagli autori suddetti. La dimostrazione si fa combinando opportunamente tecniche e risultati di Stampacchia, Beals, Agmon. I dati al contorno nel presente lavoro sono quelli di Dirichlet (soluzione nulla sulla frontiera).

Ringrazio il dott. MARCO DOTTO il quale ha studiato tali problemi nella sua tesi di laurea e ha dato qualche contributo alla stesura del presente lavoro.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del « Centro di studio per la matematica e fisica teorica » del C.N.R., Genova.

2. – Notazioni ed ipotesi.

Nel corso del presente lavoro si faranno sempre le seguenti ipotesi, senza esplicita menzione. Sia Ω un insieme aperto e limitato di R^n, siano $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $b_i \in L_n(\Omega)$, $d_i \in L_n(\Omega)$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, $c \in L_{n/2}(\Omega)$, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j \geqslant \nu |t|^2$ per ogni $t \in R^n$ e q.o. in Ω, con ν costante positiva. Poniamo

$$a(u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} (b_i u_{x_i} v + d_i u v_{x_i}) + cuv \right\} dx .$$

Siano $H^1(\Omega)$ ed $H^1_0(\Omega)$ gli spazi di Hilbert (sui complessi) ottenuti completando rispettivamente $C^1(\bar{\Omega})$ e $C^1_0(\Omega)$ (a valori complessi) secondo la norma generata dal prodotto scalare

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u \bar{v}\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_{x_i} \bar{v}_{x_i} dx .$$

Indichiamo con L l'operatore definito da

$$a(u, v) = \int_\Omega (Lu) v\, dx , \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega) . \tag{1}$$

Tale operatore ha dominio $D(L)$ denso in $L_2(\Omega)$ e rango contenuto in $L_2(\Omega)$. Per le ipotesi fatte e per i risultati di [18] lo spettro del problema di Dirichlet per l'operatore L è discreto e numerabile; possiamo quindi indicare gli autovalori di L con $\{\lambda_j\}_{j\in N}$, ove $|\lambda_1| \leqslant \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$.

È immediato verificare che se k è un qualunque numero reale, l'operatore $L + kI$ ha come autovalori la successione $\{\lambda_j + k\}_{j\in N}$, la quale ha evidentemente lo stesso comportamento asintotico di $\{\lambda_j\}_{j\in N}$.

Risulta inoltre

$$a(u, v) + k(u, v)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega (L + kI) u \bar{v}\, dx , \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega) .$$

Per noti risultati (vedi [18] teorema 3.2) se k è abbastanza grande la forma bilineare $a(u, v) + k(u, v)_{L_2(\Omega)}$ è coercitiva su $H^1_0(\Omega)$, cioè esiste una costante positiva c_0 tale che

$$\mathrm{Re}\, a(z, z) + k(z, z)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_0 \|z\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,, \qquad \forall z \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Da quanto precede risulta che non è restrittivo supporre la forma bilineare $a(\cdot,\cdot)$ essa stessa coercitiva su $H_0^1(\Omega)$, poichè in caso contrario basta sostituire ad essa la forma bilineare $a(.,.) + k(.,.)_{L_2(\Omega)}$ e all'operatore L l'operatore $L + kI$. Sia dunque senz'altro

$$\mathrm{Re}\, a(z, z) \geqslant c_0 \|z\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,, \qquad \forall z \in H_0^1(\Omega)\,. \tag{2}$$

In questo caso, sempre per i risultati di [18], esiste l'operatore G inverso di L:

$$a(Gw, v) = \int_\Omega w\bar{v}\, dx\,, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

G ha dominio $L_2(\Omega)$ e rango $R(G) = D(L)$ contenuto in $H_0^1(\Omega)$. Gli autovalori di G sono i reciproci degli autovalori di L

$$\lambda_j(G) = \lambda_j^{-1}\,, \qquad \forall j \in N\,. \tag{3}$$

I numeri caratteristici dell'operatore G si definiscono nel modo seguente (vedi [12] pag. 1089), per ogni $j \in N$:

$$\mu_j(G) = \inf_{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{j-1} \in L_2(\Omega)} \sup \Big\{ \|G\varphi\|_{L_2(\Omega)} \colon \varphi \in L_2(\Omega),$$
$$\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} \leqslant 1,\ (\varphi, \varphi_i)_{L_2(\Omega)} = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant j-1 \Big\}.$$

Indichiamo con T l'operatore inverso dell'operatore di Laplace: è l'operatore definito in $L_2(\Omega)$ tale che

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega (Tu)_{x_i} \bar{v}_{x_i} dx = \int_\Omega u\bar{v}\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Sia G_0 la restrizione dell'operatore G ad $H_0^1(\Omega)$; in altre parole G_0 è quell'operatore definito in $H_0^1(\Omega)$ a valori in $R(G_0) \subset H_0^1(\Omega)$ tale che $G_0 u = Gu$ per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$.

Analogamente sia T_0 la restrizione di T ad $H_0^1(\Omega)$:

$$T_0 \colon H_0^1(\Omega) \to R(T_0) \subset H_0^1(\Omega)$$

tale che $T_0 u = Tu$ per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$.

Sia infine

$$S: H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$

l'operatore lineare tale che

$$a(Su, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} u_{x_i} \bar{v}_{x_i} dx \qquad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) .$$

È facile verificare che risulta $G_0 = ST_0$. Infatti si ha, per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$a(G_0 u, v) = \int_{\Omega} u\bar{v}\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{4}$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} (T_0 u)_{x_i} \bar{v}_{x_i} dx = \int_{\Omega} u\bar{v}\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{5}$$

e applicando la definizione di S:

$$a(ST_0 u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} (T_0 u)_{x_i} \bar{v}_{x_i} dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) . \tag{6}$$

Per la coercività della forma bilineare $a(.,.)$ dalle (4), (5), (6) segue facilmente $ST_0 u = G_0 u$ e per l'arbitrarietà di u si ha l'asserto.

3. – Lemmi preliminari.

In questo paragrafo si darà una valutazione asintotica dei numeri caratteristici di alcuni operatori.

LEMMA 1. – *Gli operatori G_0 e T_0 sono completamente continui in $H_0^1(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE. – Basta limitarsi a considerare G_0, essendo analogo il caso di T_0. Data una successione $\{u_k\}_{k \in N}$ limitata in $H_0^1(\Omega)$, essendo l'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$ completamente continua, esiste una successione $\{u_{k_l}\}_{l \in N}$, estratta da $\{u_k\}_{k \in N}$, che converge in $L_2(\Omega)$. Risulta peraltro, per la coercività della forma bilineare a $(.,.)$ e per noti teoremi di Sobolev:

$$\| G_0 u_{k_l} - G_0 u_{k_m} \|_{H_0^1(\Omega)} \leq (K_1/c_0)(\text{mis } \Omega)^{1/n} \| u_{k_l} - u_{k_m} \|_{L_2(\Omega)}$$

essendo K_1 una costante dipendente solo da n. Ciò prova che la successione $\{G_0 u_{k_l}\}_{l \in N}$ è di Cauchy, e quindi convergente, in $H_0^1(\Omega)$.

LEMMA 2. – *Risulta*

$$\mu_j(G_0) = O(j^{-2/n}) \qquad \textit{per } j \to +\infty .$$

DIMOSTRAZIONE. – Indicando con $\|S\|$ la norma dell'operatore S, per noti risultati (vedi ad esempio [3], [12]) risulta

$$\mu_j(G_0) = \mu_j(ST_0) \leqslant \|S\| \mu_j(T_0) \qquad (j = 1, 2, \ldots) . \tag{7}$$

Pertanto la tesi risulterà provata non appena si dimostri che

$$\mu_j(T_0) = O(j^{-2/n}) \qquad \text{per } j \to +\infty . \tag{8}$$

Essendo l'operatore T_0 autoaggiunto, i suoi numeri caratteristici coincidono con i suoi autovalori (vedi ad esempio [3]): si ha cioè:

$$\mu_j(T_0) = \lambda_j(T_0) \qquad (j = 1, 2, \ldots) . \tag{9}$$

Inoltre gli autovalori dell'operatore T_0 sono evidentemente gli stessi dell'operatore T, essendo $R(T) \subset H_0^1(\Omega)$. Per noti teoremi (vedi ad esempio [11], [20]) risulta pertanto

$$\lambda_j(T_0) = \lambda_j(T) = O(j^{-2/n}) \qquad \text{per } j \to +\infty . \tag{10}$$

Dalle (9), (10) si ha la (8) e quindi la (7) risulta provata.

Sia ora $N(t)$ il numero degli autovalori di L (tenendo conto della molteplicità) che non supera t, cioè

$$N(t) = \sum_{|\lambda_j| \leqslant t} 1 . \tag{11}$$

Richiamiamo a tale proposito alcuni risultati noti.

LEMMA 3. – *Sia α un numero reale. Condizione necessaria e sufficiente affinchè*

$$N(t) \leqslant K t^\alpha , \qquad \forall t \geqslant 0$$

è che

$$(j/K)^{1/\alpha} \leqslant |\lambda_j| , \qquad \forall j \in N .$$

DIMOSTRAZIONE (vedi [4] pag. 703). – La condizione è necessaria:

$$j \leqslant N(|\lambda_j|) \leqslant K|\lambda_j|^{\alpha} \qquad \text{per } j = 1, 2, \ldots,$$

da cui subito

$$(j/K)^{1/\alpha} \leqslant |\lambda_j|, \qquad j = 1, 2, \ldots .$$

La condizione è sufficiente:

$$N(t) = \max\{j\colon |\lambda_j| \leqslant t\} \leqslant \max\{j\colon (j/k)^{1/\alpha} \leqslant t\} \leqslant Kt^{\alpha}.$$

LEMMA 4. – *Sia A un operatore completamente continuo e supponiamo che per un numero positivo p sia*

$$\mu_j(A) = O(j^{-p}), \qquad \textit{per } j \to +\infty .$$

Allora se l'operatore A ha un numero infinito di autovalori si ha

$$\lambda_j(A) = O(j^{-p}), \qquad \textit{per } j \to +\infty .$$

DIMOSTRAZIONE (vedi [13] pag. 41).

4. – Risultati principali.

Possiamo ora enunciare il principale risultato del presente lavoro.

TEOREMA 1. – *Detto $N(t)$ il numero definito dalla* (11), *risulta*

$$N(t) = O(t^{n/2}), \qquad \textit{per } t \to +\infty .$$

DIMOSTRAZIONE. – Dal Lemma 2 si ha

$$\mu_j(G_0) = O(j^{-2/n}) \qquad \text{per } j \to +\infty .$$

Dal Lemma 4 segue allora

$$\lambda_j(G_0) = O(j^{-2/n}), \qquad \text{per } j \to +\infty .$$

Ma gli autovalori di G_0, come subito si verifica, coincidono con gli autovalori di G, essendo $R(G) \subset H_0^1(\Omega)$.

Si ha pure pertanto

$$\lambda_j(G) = O(j^{-2/n}), \quad \text{per } j \to +\infty. \tag{12}$$

Come si è già osservato, gli autovalori di L sono i reciproci degli autovalori di G, quindi dall'ultima uguaglianza scritta si ottiene

$$\lambda_j^{-1} = O(j^{-2/n}), \quad \text{per } j \to +\infty,$$

cioè esiste una costante positiva K_2 tale che

$$j^{2/n} \leqslant K_2|\lambda_j|, \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Dal Lemma 3 segue infine

$$N(t) \leqslant K_2^{n/2} t^{n/2}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Nel caso autoaggiunto il risultato precedente si può precisare come segue.

TEOREMA 2. – *Oltre alle ipotesi elencate nel paragrafo* 2, *supponiamo che* $a_{ij} = a_{ji}$, $b_i = d_i$ *q.o. in* Ω $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.
Allora risulta

$$\lambda_j \sim j^{2/n}, \quad \textit{per } j \to +\infty$$

e quindi

$$N(t) \sim t^{n/2}, \quad \textit{per } t \to +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE. – Nelle ipotesi dette, l'operatore L definito nella (1) è autoaggiunto. Per noti risultati (vedi ad esempio [11], [13], [14]) risulta allora

$$\lambda_j = \sup_{\substack{g_i \in H_0^1(\Omega) \\ 1 \leqslant i \leqslant j-1}} \inf \big\{ a(u, u) : u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_{L_2(\Omega)} = 1, \\ (u, g_i)_{L_2(\Omega)} = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant j-1 \big\}.$$

Poichè la forma bilineare a (.,.) è limitata e coercitiva su $H_0^1(\Omega)$, si ha

$$c_0\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant a(u, u) \leqslant C_0\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

essendo c_0, C_0 costanti positive. Di qui, essendo

$$\lambda_i(\Delta) = \sup_{\substack{g_i \in H_0^1(\Omega) \\ 1 \leqslant i \leqslant j-1}} \inf \big\{ \|u_x\|^2_{L_2(\Omega)} : u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_{L_2(\Omega)} = 1, \\ (u, g_i)_{L_2(\Omega)} = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant j-1 \big\},$$

segue subito

$$K_3\lambda_j(\Delta)\leqslant\lambda_j\leqslant K_4\lambda_j(\Delta)\,,\qquad (j=1,2,\ldots)\,. \tag{13}$$

Poichè per noti risultati ([11], [20]) è

$$\lambda_j(\Delta)\sim j^{2/n}\,,\qquad \text{per } j\to+\infty\,, \tag{14}$$

dalle (13), (14) si ha la tesi.

5. – Osservazione.

I risultati precedenti si possono in parte estendere ad alcune classi di equazioni lineari ellittiche del secondo ordine in forma non variazionale. Si considerano gli operatori ellittici della forma

$$Mu=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}+cu$$

e la classe di funzioni in cui si cerca la soluzione del problema di Dirichlet è questa volta lo spazio $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. $H^2(\Omega)$ si definisce come lo spazio ottenuto completando $C^\infty(\bar{\Omega})$ secondo la norma

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}=\|u\|_{L_2(\Omega)}+\sum_{i,j=1}^{n}\|u_{x_ix_j}\|_{L_2(\Omega)}\,.$$

L'aperto Ω è supposto limitato in R^n e dotato di frontiera rappresentabile localmente con una funzione di classe C^2. Sui coefficienti dell'operatore M si fanno le stesse ipotesi degli omonimi coefficienti della forma bilineare $a(.,.)$ indicate nel paragrafo 2, e inoltre le seguenti: $a_{ij}=a_{ji}$, $(i,j=1,2,\ldots,n)$ quasi ovunque in Ω, e valga una (almeno) delle condizioni

i) $a_{ij}\in C^0(\bar{\Omega})$, $(i,j=1,2,\ldots,n)$;

ii) $a_{ij}\in H^{1,n}(\Omega)$, $(i,j=1,2,\ldots,n)$;

iii) $\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\Big)^2\Big(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2\Big)^{-1}>n-1$.

In ciascuno dei casi i), ii), iii) si dimostra che lo spettro del problema

$$\begin{cases} Mu+\lambda u=0\,, & \text{q.o. in } \Omega\,,\\ u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) & \end{cases} \tag{15}$$

è discreto e numerabile (vedi ad esempio [9] per i), [16] per ii) e [19], [8] per iii)).

Sia $N(t)$ il numero degli autovalori (tenendo conto della molteplicità) del problema (15) il cui modulo non supera t; allora risulta, in ciascuno dei casi i), ii), iii):

$$N(t) = O(t^{n/2}), \qquad \text{per } t \to +\infty .$$

Basta osservare, per la dimostrazione, che l'operatore M^{-1} (inverso di M) porta $L_2(\Omega)$ in $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Tenendo allora presenti il teorema 4.1 e il lemma 4.2 di [3] si ha la tesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Agmon, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand, Princeton, 1965.

[2] S. Agmon, *Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators*, Arch. Rational Mech. Anal., **28** (1968), pp. 165-183.

[3] R. Beals, *Classes of compact operators and eigenvalue distributions for elliptic operators*, Amer. J. Math., **89** (1967), pp. 1056-1072.

[4] R. Beals, *On eigenvalue distributions for elliptic operators without smooth coefficients*, Bull. Amer. Math. Soc., **72** (1966), pp. 701-705.

[5] F. E. Browder, *On the spectral theory of elliptic differential operators, I*, Math. Ann., **142** (1961), pp. 22-130.

[6] T. Carleman, *Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes* 8th Scand. Mat. Congress (1934); Collected Works, Malmö, 1960, pp. 471-483.

[7] M. Chicco, *Principio di massimo forte per sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale*, Boll. Un. Mat. Ital., (3) **22** (1967), pp. 368-372.

[8] M. Chicco, *Equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo Cordes con termini di ordine inferiore*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **85** (1970), pp. 347-356.

[9] M. Chicco, *Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti continui*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **88** (1971), pp. 123-134.

[10] C. Clark, *The asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions for elliptic boundary value problems*, SIAM Rev., **9** (1967), pp. 627-646.

[11] R. Courant - D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Interscience, New York, 1953.

[12] N. Dunford - J. Schwartz, *Linear operators*, vol. 1 e 2, Interscience, New York, 1958.

[13] I. C. Gohberg - M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear non-*

selfadjoint operators, Translations of Mathematical Monographs, **18** (1969).

[14] R. LEIS, *Zur Monotonie der Eigenwerte selbstadjungierter elliptischer Differentialgleichungen*, Math. Z., **96** (1967), pp. 26-32.

[15] W. LITTMAN - G. STAMPACCHIA - H. F. WEINBERGER, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) **17** (1963), pp. 43-77.

[16] C. MIRANDA, *Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale a coefficienti discontinui*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **63** (1963), pp. 353-386.

[17] G. STAMPACCHIA, *Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **51** (1960), pp. 1-38.

[18] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15** (1965), pp. 189-258.

[19] G. TALENTI, *Sopra una classe di equazioni ellittiche a coefficienti misurabili*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **69** (1965), pp. 285-304.

[20] H. WEYL, *Die asymptotischen Verteilungsgesetze der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen*, Math. Ann., **71** (1912), pp. 441-479.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 31 maggio 1976