Equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo Cordes con termini di ordine inferiore.

MAURIZIO CHICCO (Genova) (*) (**)

Summary. - *I study the spectrum of linear second order elliptic partial differentiat equations of Cordes type with lower order terms.*

Introduzione.

Recentemente alcuni autori (CORDES [6], TALENTI [12], CAMPANATO [2]) hanno studiato le equazioni ellittiche del tipo

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} = f$$

ove sui coefficienti a_{ij} non si fanno ipotesi di regolarità, ma si suppone che gli autovalori della forma quadratica associata sono abbastanza vicini tra loro. Scopo del presente lavoro è studiare un'equazione dello stesso tipo contenente però anche i termini di ordine inferiore. Attraverso una opportuna maggiorazione a priori della soluzione si ottiene una localizzazione dello spettro da cui seguono subito teoremi di esistenza e unicità.

Notazioni e ipotesi.

Nel seguito si faranno sempre le seguenti ipotesi, senza esplicita menzione. Sia Ω un insieme aperto e limitato di R^n $(n \geq 2)$ dotato di frontiera $\partial\Omega$ di classe C^3. Sia $H^{2,2}(\Omega)$ lo spazio ottenuto completando $C^\infty(\overline{\Omega})$ rispetto alla norma

$$\| u \|_{H^{2,2}(\Omega)} = \| u \|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \| u_{x_i x_j} \|_{L_2(\Omega)}$$

Sia $H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$ lo spazio ottenuto completando $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap \{ f : f = 0 \text{ su } \partial\Omega \}$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Entrata in Redazione il 26 ottobre 1969.

rispetto alla norma

$$\| u \|_{H^{2,2}(\Omega,\, \partial\Omega)} = \{ \sum_{i,j=1}^{n} \| u_{x_j x_j} \|^2_{L_2(\Omega)} \}^{1/2}$$

In $H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$ le norme $\| \cdot \|_{H^{2,2}(\Omega)}$ e $\| \cdot \|_{H^{2,2}(\Omega,\, \partial\Omega)}$ sono equivalenti. Indichiamo con L l'operatore

$$L = - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c\,.$$

Sui coefficienti di L si fanno le ipotesi seguenti: $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$ con la normalizzazione $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x) \equiv 1$ in Ω (non restrittiva e supposta soltanto per comodità); $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Posto poi

$$\alpha(x) = \frac{1}{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(x)}$$

supponiamo che $\operatorname{ess}_\Omega \inf \alpha(x) > n - 1$, per modo che, se diciamo $k = \operatorname{ess}_\Omega \sup\, [n - \alpha(x)]^{1/2}$, risulta $0 \leq k < 1$. Osserviamo che le ipotesi fatte implicano la positività della forma quadratica $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j$ (vedi [12]). Per gli altri coefficienti supponiamo che sia $b_i \in L_p(\Omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $c \in L_q(\Omega)$ ove p, q sono scelti in modo che valgano le disuguaglianze di SOBOLEV seguenti:

$$\| \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} \|_{L_2(\Omega)} \leq K_1 \| u \|_{H^{2,2}(\Omega)}\,; \qquad \| cu \|_{L_2(\Omega)} \leq K_2 \| u \|_{H^{2,2}(\Omega)}$$

per ogni $u \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$. In queste ipotesi l'operatore L porta $H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$ in $L_2(\Omega)$. Conveniamo infine per brevità di omettere le espressioni del tipo « quasi ovunque » per le funzioni di $L_2(\Omega)$ o « nel senso di $H^{2,2}(\Omega)$ » per le funzioni di questo spazio. Ad esempio colla notazione « $f \leq 0$ in Ω » intenderemo che: se $f \in L_2(\Omega)$, f è limite in $L_2(\Omega)$ di funzioni continue e non positive in Ω; se $f \in H^{2,2}(\Omega)$, f è limite in $H^{2,2}(\Omega)$ di funzioni di classe $C^\infty(\overline{\Omega})$ e non positive in $\overline{\Omega}$.

È noto il seguente risultato di TALENTI, fondamentale per il seguito:

LEMMA 1. - *Sia H la curvatura media di $\partial\Omega$ (la normale è orientata verso l'esterno). Allora risulta*

$$\| u \|^2_{H^{2,2}(\Omega,\, \partial\Omega)} = \| \Delta u \|^2_{L_2(\Omega)} + (n - 1) \cdot \int_{\partial\Omega} H u_x^2 \, d\sigma$$

per ogni $u \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$.

Dimostrazione: – vedi [12] pag. 294.

LEMMA 2. – *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una costante* λ_0 *dipendente da* ε, b_i, c, n, Ω *tale che per ogni* $\lambda \geq \lambda_0$ *e per ogni* $u \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$ *risulti:*

$$\| u \|^2_{H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)} \leq (1 + \varepsilon) \cdot \| - \Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + \lambda u \|^2_{L_2(\Omega)}$$

Dimostrazione. – Prendiamo le mosse dalla seguente disuguaglianza. Esiste una costante K_3, dipendente solo da n ed Ω, tale che per ogni $f \in H^1(\Omega)$ risulti:

$$\| f \|^2_{L_2(\partial\Omega)} \leq K_3 \cdot \| f \|^2_{L_2(\Omega)} + K_3 \cdot \| f \|_{L_2(\Omega)} \cdot \| f_x \|_{L_2(\Omega)} \tag{1}$$

(per questa disuguaglianza si veda ad esempio [13] pag. 372). Ricordando il lemma 1 e applicando la (1) alle derivate prime di u si trova

$$\| u \|^2_{H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)} \leq K_4 \| u_x \|^2_{L_2(\Omega)} + K_4 \| u_x \|_{L_2(\Omega)} \| u \|_{H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)} + \| \Delta u \|^2_{L_2(\Omega)} \tag{2}$$

valida per ogni $u \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$, ove K_4 dipende da n e da Ω. Dalla (2) si ha subito

$$\| u \|^2_{H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)} \leq K_4 \left(1 + \frac{1}{4\eta}\right) \| u_x \|^2_{L_2(\Omega)} + \eta K_4 \cdot \| u \|^2_{H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)} + \| \Delta u \|^2_{L_2(\Omega)} \tag{3}$$

valida per ogni $\eta > 0$ e per ogni $u \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$.

Risulta poi, per ogni $\mu > 0$ e per ogni $u \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \{ - \Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + \lambda u \}^2 dx = \\ = \int_\Omega \{ (\Delta u)^2 + (\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i})^2 + (cu)^2 + (\lambda u)^2 - 2cu\Delta u - 2\lambda u \Delta u + \\ + 2cu(\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}) - 2\Delta u(\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}) + 2\lambda u(\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}) + 2\lambda c u^2 \} dx; \end{aligned} \tag{4}$$

$$- 2\lambda \int_\Omega u \Delta u dx = 2\lambda \| u_x \|_{L_2(\Omega)}; \tag{5}$$

$$| 2\Delta u(\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}) | \leq \mu(\Delta u)^2 + \frac{1}{\mu} (\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i})^2 \tag{6}$$

$$| 2cu\Delta u | \leq \mu(\Delta u)^2 + \frac{1}{\mu} (cu)^2 \tag{7}$$

$$(8) \qquad |2cu(\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i})| \leq (cu)^2 + (\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i})^2$$

$$(9) \qquad |2\lambda u(\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i})| \leq \frac{1}{2}(\lambda u)^2 + 2(\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i})^2$$

$$(10) \qquad |2\lambda c u^2| \leq \frac{1}{2}(\lambda u)^2 + 2(cu)^2$$

Per note proprietà delle funzioni di $H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$ esiste una costante K_5 dipendente da η, μ, n, b_i, c, Ω tale che risulti, per ogni $u \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$

$$(11) \qquad \left(2 + \frac{1}{\mu}\right) \cdot [\| cu \|^2_{L_2(\Omega)} + \| \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} \|^2_{L_2(\Omega)}] \leq \eta \| u \|^2_{H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)} + K_5 \| u_x \|^2_{L_2(\Omega)} .$$

Tenendo conto delle (4), (5),..., (11) e della ovvia disuguaglianza

$$\| \Delta u \|^2_{L_2(\Omega)} \leq n \| u \|^2_{H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)}$$

si trova

$$(12) \qquad \| \Delta u \|^2_{L_2(\Omega)} + 2\lambda \| u_x \|^2_{L_2(\Omega)} \leq$$

$$\leq \| - \Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + \lambda u \|^2_{L_2(\Omega)} + K_5 \| u_x \|^2_{L_2(\Omega)} + (\eta + 2\mu n) \| u \|^2_{H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)} .$$

Dalle (3), (12) si ricava:

$$(13) \qquad (1 - \eta K_4 - \eta - 2\mu n) \| u \|^2_{H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)} \leq$$

$$\leq \| - \Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + \lambda u \|^2_{L_2(\Omega)} + (K_4 + \frac{K_4}{4\eta} + K_5 - 2\lambda) \| u_x \|^2_{L_2(\Omega)} .$$

A questo punto fissiamo μ ed η in modo che risulti

$$(14) \qquad 1 - \eta K_4 - \eta - 2\mu n \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} .$$

In corrispondenza resta fissata anche la costante K_5.

Allora se si pone $\lambda_0 = \dfrac{K_4}{2} + \dfrac{K_4}{8\eta} + \dfrac{K_5}{2}$, dalle (13), (14) segue la tesi, c.v.d.

LEMMA 3. - *Esistono due costanti λ_0 e K_6 dipendenti solo dai coefficienti* *di L tali che se* $\lambda \geq \lambda_0$, $u \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$ *e*

$$\left(L + \frac{\lambda}{\alpha} I\right)u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + \frac{\lambda}{\alpha} u = f \text{ in } \Omega,$$

allora risulta

$$\| u \|_{H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)} \leq K_6 \| f \|_{L_2(\Omega)}. \tag{15}$$

Dimostrazione. - Dal lemma precedente segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste λ_0 tale che se $\lambda \geq \lambda_0$ sia, per ogni $u \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$:

$$\| u \|^2_{H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)} \leq (1 + \varepsilon) \left\| -\Delta u + \alpha \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + \alpha c u + \lambda u \right\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

D'altra parte si ha (vedi [2]):

$$\left\| -\Delta u + \alpha \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + \alpha c u + \lambda u - \alpha\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + \frac{\lambda}{\alpha} u\right) \right\|^2_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \left\| \alpha \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j} - \Delta u \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq k^2 \| u \|^2_{H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)}.$$

Pertanto basta scegliere $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{k^2} - 1$ per ottenere, con procedimenti standard, l'esistenza dell'operatore inverso di $L + \dfrac{\lambda}{\alpha} I$ e la maggiorazione voluta, c.v.d.

LEMMA 4. - *Sia* $c \geq 0$, $f \leq 0$ *in* Ω. *Esiste una costante* λ_0, *dipendente dai coefficienti di L, tale che se* $\lambda \geq \lambda_0$, $u \in H^{2,2}(\Omega)$, $u \leq M$ *su* $\partial\Omega$, $\left(L + \dfrac{\lambda}{\alpha} I\right)u = f$ *in* Ω, *allora risulta* $u \leq M$ *in* Ω.

Dimostrazione. - Scegliamo λ_0 in modo che valga la (15) (vedi lemma precedente) e sia poi $\lambda \geq \lambda_0$. Prolunghiamo le funzioni a_{ij} a tutto R^n ponendole uguali a $\dfrac{\delta_{ij}}{n}$ fuori di Ω. Sia $\vartheta \in C_0^\infty(R^n)$, $\vartheta(x) \equiv 0$ per $|x| > 1$, $\displaystyle\int_{R_n} \vartheta(x)dx = 1$.

Poniamo, per $m > 0$:

$$a_{ij}^{(m)}(x) = m^{-n} \int_{R_n} \vartheta\left(\frac{x - y}{m}\right) a_{ij}(y)dy$$

Allora risulta $a_{ij}^{(m)} \in C^\infty(R^n)$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x) \equiv 1$, $\lim_{m\to\infty} a_{ij}^{(m)} = a_{ij}$ nella topologia debole di $L_\infty(\Omega)$ (in particolare in ogni $L_r(\Omega)$, $1 \leq r < +\infty$).

Per noti teoremi (vedi [8] tenendo conto di [3]) esiste una ed una sola funzione $u^{(m)} \in H^{2,2}(\Omega)$ tale che $u^{(m)} - u \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$ e

$$\left(L^{(m)} + \frac{\lambda}{\alpha^{(m)}} I\right) u^{(m)} \equiv - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(m)} u_{x_i x_j}^{(m)} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}^{(m)} + c u^{(m)} + \frac{\lambda}{\alpha^{(m)}} u^{(m)} = f \text{ in } \Omega,$$

$$\text{ove si è posto } \alpha^{(m)} = \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} [a_{ij}^{(m)}]^2 \right\}^{-1}.$$

Ne segue che

$$\left(L^{(m)} + \frac{\lambda}{\alpha^{(m)}} I\right)(u^{(m)} - u) = \mathrm{f} - \left(L^{(m)} + \frac{\lambda}{\alpha^{(m)}} I\right) u \tag{16}$$

Osserviamo che la costante K_6 del lemma precedente, applicato all'operatore $L^{(m)} + \frac{\lambda}{\alpha^{(m)}} I$, non dipende da m. Si ottiene pertanto, per la (16) e per il lemma precedente:

$$\| u^{(m)} - u \|_{H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)} \leq K_6 \cdot \| \mathrm{f} - \left(L^{(m)} + \frac{\lambda}{\alpha^{(m)}} I\right) u \|_{L_2(\Omega)}.$$

Il secondo membro è ovviamente limitato al variare di m. Allora esiste una successione estratta da $\{u^{(m)}\}$ debolmente convergente in $H^{2,2}(\Omega)$ ad una funzione v che, come facilmente si verifica, è soluzione della equazione $\left(L + \frac{\lambda}{\alpha} I\right) v = f$ in Ω e quindi $u = v$. Per noti teoremi ([3], [11]) risulta $u^{(m)} \leq M$ in Ω e quindi anche il limite debole u non supera M in Ω, c.v.d.

LEMMA 5. - *Sia $c \geq 0$ in Ω. Tra tutti gli autovalori dell'operatore $-\alpha L$ ce ne è uno, sia λ_1, di massima parte reale, così caratterizzato: λ_1 è reale ed è l'estremo inferiore dei numeri reali λ tali che $u \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$, $\alpha L u + \lambda u \leq 0$ in Ω implica $u \leq 0$ in Ω.*

Dimostrazione. - (tratta in parte da [4]). Il lemma 3 prova che lo spettro dell'operatore $-\alpha L$ non incontra l'insieme $\{\lambda : \lambda \in R, \lambda \geq \lambda_0\}$. Pertanto se μ è reale e $\mu \geq \lambda_0$, esiste l'operatore G_μ inverso di $\alpha L + \mu I$. L'operatore G_μ porta $L_2(\Omega)$ in $H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$ e quindi è completamente continuo come operatore di $L_2(\Omega)$ in sè.

Il lemma precedente prova che risulta $G_\mu \mathrm{f} \leq 0$ in Ω se $\mathrm{f} \leq 0$ in Ω. Per noti teoremi (teorema 6.1 pag. 262 di [7]) esiste un autovalore reale t_1 di G_μ che ha modulo massimo tra tutti gli autovalori di G_μ:

$$|t| \leq t_1 \quad \text{per ogni } t \text{ autovalore di } G_\mu. \tag{17}$$

D'altra parte è facile vedere che se λ é un autovalore dell'operatore

$-\alpha L$, il numero $t=(\mu-\lambda)^{-1}$ è un autovalore dell'operatore G_μ e viceversa. Pertanto, posto $t_1=(\mu-\lambda_1)^{-1}$, la (17) fornisce:

$$|\mu-\lambda|\geq\mu-\lambda_1 \qquad \text{per ogni } \lambda \text{ autovalore di } -\alpha L. \tag{18}$$

Poichè la (18) vale per ogni μ reale abbastanza grande, si può in essa far divergere positivamente μ ottenendo

$$Re\ \lambda\leq\lambda_1 \qquad \text{per ogni } \lambda \text{ autovalore di } -\alpha L. \tag{19}$$

Resta da far vedere che per λ_1 vale la caratterizzazione enunciata nel presente lemma. Consideriamo l'insieme di numeri reali

$$B=\{\lambda : \alpha Lu+\lambda u\leq 0 \text{ in } \Omega,\ u\in H^{2,2}(\Omega,\ \partial\Omega)\Rightarrow u\leq 0 \text{ in } \Omega\}.$$

Questo insieme B gode delle seguenti proprietà:

1) B contiene la semiretta $\{\lambda : \lambda\geq\lambda_0\}$ (vedi lemma 4).

2) B è aperto a sinistra (per questo argomento si veda [9]). Sia infatti $\mu\in B$ e λ tale che $0<\mu-\lambda<\|G_\mu\|^{-1}$, allora esiste G_λ e risulta

$$G_\lambda=\sum_{j=0}^{\infty}(\mu-\lambda)^j G_\mu^{j+1}$$

da cui $\lambda\in B$.

3 Se $\mu\in\overline{B}$ e μ non è un autovalore di $-\alpha L$, allora $\mu\in B$: si verifica subito infatti che in questo caso $\lim\limits_{B\ni\lambda\to\mu}\|G_\lambda-G_\mu\|=0$ (vedi [9]).

Ciò basta per concludere che B è una semiretta aperta il cui estremo è un autovalore; pertanto $B=\{\lambda : \lambda>\lambda_1\}$, c.v.d.

A questo punto possiamo enunciare il risultato principale del presente lavoro:

TEOREMA 1. - *Esiste una costante c_0, dipendente da a_{ij}, b_i, n, Ω, tale che se $c\geq c_0$, $u\in H^{2,2}(\Omega,\ \partial\Omega)$, $Lu\leq 0$ in Ω, allora risulta $u\leq 0$ in Ω.*

Dimostrazione. - Consideriamo l'operatore

$$L_0=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial_2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

cioè l'operatore L ove si ponga $c=0$. Per il lemma precedente tra tutti gli autovalori di $-\alpha L_0$ ce ne è uno di massima parte reale, e sia $\widehat{\lambda}$.

Sia ora $\text{ess}_\Omega \inf c>\text{ess}_\Omega \sup\dfrac{\widehat{\lambda}}{\alpha}$ e facciamo vedere che in tal caso λ_1 (l'autovalore di $-\alpha L$ avente massima parte reale) è negativo. Per assurdo sia $\lambda_1 \geq 0$. Per il già citato teorema 6.1 di [7] esiste in corrispondenza di λ_1 un'autofunzione non negativa: $w_1 \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$, $w_1 \geq 0$ in Ω, w_1 non identicamente nulla in Ω, tale che

$$Lw_1 + \frac{\lambda_1}{\alpha} w_1 \equiv L_0 w_1 + c w_1 + \frac{\lambda_1}{\alpha} w_1 = 0 \text{ in } \Omega.$$

Ne seguirebbe

$$L_0 w_1 + \frac{\lambda}{\alpha} w_1 = -\frac{\lambda_1}{\alpha} w_1 + \left(\frac{\lambda}{\alpha} - c\right) w_1 \leq 0 \text{ in } \Omega$$

non appena si scelga $\widehat{\lambda} < \lambda < \alpha c$. Per il lemma 5, applicato all'operatore L_0, ciò implica $w_1 \leq 0$ in Ω, assurdo. Ne segue $\lambda_1 < 0$, da cui la tesi ove si scelga per c_0 qualunque numero maggiore di $\operatorname{ess}_\Omega \sup \frac{\widehat{\lambda}}{\alpha}$, c.v.d.

In certi casi è possibile precisare la costante c_0 che compare nel teorema precedente.

COROLLARIO 1. - *La costante c_0 del teorema* 1 *si può scegliere nel modo seguente*: $c_0 = 0$ *se* $n = 2$, $c_0 > 0$ (*e per il resto arbitraria*) *se* $n = 3$ *oppure* $n = 4$.

Dimostrazione. - Per $n = 2$ il risultato è noto: è contenuto nei lavori di ALEKSANDROV [1] e di PUCCI [10] (si veda anche [13], teorema 3).

Per $n = 3, 4$ si può ragionare nel modo seguente. Supponiamo per assurdo che sia $\widehat{\lambda} > 0$ (per la definizione di $\widehat{\lambda}$ si veda la dimostrazione del teorema 1). Sia w l'autofunzione non negativa corrispondente: $w \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$ $w \geq 0$ in Ω, w non identicamente nulla in Ω, e inoltre

$$L_0 w + \frac{\widehat{\lambda}}{\alpha} w = 0 \text{ in } \Omega. \tag{20}$$

Sia ora $k > 1$; la funzione w^k appartiene ancora a $H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$.

Infatti per i risultati di Campanato [2] e per la (20) in realtà le derivate seconde di w stanno in qualche $L_r(\Omega)$ con $r > 2$; un facile calcolo e i noti teoremi di SOBOLEV mostrano quindi che $w^k \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$ per ogni $k \geq 1$. Risulta poi:

$$L_0 w^k + \frac{\widehat{\lambda}}{\alpha} k w^k \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(w^k)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i (w^k)_{x_i} + \frac{\widehat{\lambda}}{\alpha} k w^k =$$

$$= -k(k-1) w^{k-2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_i} w_{x_j} + k w^{k-1} \left[-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i w_{x_i} + \frac{\widehat{\lambda}}{\alpha} w \right] \leq 0$$

in Ω.

Pertanto, scelto $k > 1$, il lemma 5 implica $w^k = 0$ in Ω, assurdo. Deve quindi essere $\widehat{\lambda} \leq 0$, e la dimostrazione del teorema 1 prova che si può prendere come costante c_0 un qualunque numero positivo, c.v.d.

OSSERVAZIONE. Se $n = 3$ o 4 e se risulta $b_i \in L_\infty(\Omega)$ per almeno un valore di i, si può porre $c_0 = 0$ nel teorema 1. Ciò si dimostra per mezzo di un artificio di PICARD, tenendo presente il corollario 1, esattamente come in [5], pag. 322.

COROLLARIO 2. - *Supponiamo che, orientata la normale verso l'esterno, la frontiera di Ω abbia curvatura media non positiva in ogni punto. Allora esiste una costante K_7, dipendente da a_{ij}, n, Ω, tale che se $\sum_{i=1}^{n} \| b_i \|_{L_n(\Omega)} \leq K_7$ si può prendere $c_0 = 0$ nel teorema 1.*

Dimostrazione. - Nelle ipotesi fatte dai risultati di TALENTI [12] segue che è

$$\| u \|_{H^{2,2}(\Omega,\, \partial\Omega)} \leq K_8 \| L_0 u - \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} \|_{L_2(\Omega)} \tag{21}$$

per ogni $u \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$, ove K_8 dipende da a_{ij} e da n. Scegliamo ora K_7 in modo che $\sum_{i=1}^{n} \| b_i \|_{L_n(\Omega)} \leq K_7$ implichi

$$K_8 \| \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} \|_{L_2(\Omega)} \leq \vartheta \| u \|_{H^{2,2}(\Omega,\, \partial\Omega)} \tag{22}$$

per ogni $u \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$, ove $0 < \vartheta < 1$. Dalle (21), (22) segue allora

$$\| u \|_{H^{2,2}(\Omega,\, \partial\Omega)} \leq K_8 \| L_0 u \|_{L_2(\Omega)} + \vartheta \| u \|_{H^{2,2}(\Omega,\, \partial\Omega)}$$

e quindi

$$\| u \|_{H^{2,2}(\Omega,\, \partial\Omega)} \leq \frac{K_8}{1 - \vartheta} \| L_0 u \|_{L_2(\Omega)} \qquad \text{per ogni } u \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega).$$

Di qui segue la tesi come nel lemma 4, c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. D. ALEKSANDROV, *Majoration of the solutions of second order linear equations*, American Mathematical Society Translations (2), vol. 68 (1968), pag. 120-143.

[2] S. CAMPANATO, *Un risultato relativo ad equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (3), vol. **21** (1967), pag. 701-707.

[3] M. CHICCO, *Principio di massimo forte per sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana (3), vol. **22** (1967), pag. 368-372.

[4] M. CHICCO, ***Principio di massimo generalizzato e valutazione del primo autovalore per equazioni ellittiche del secondo ordine in forma variazionale,*** (deve apparire).

[5] R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of mathematical physics,* Interscience, New York (1962), vol. **2**.

[6] H. O. CORDES, *Zero order a priori estimates for solutions of elliptic differential equations,* Proceedings of symposia in pure mathematics, vol. **4** (1961), pag. 157-166.

[7] M. G. KREĬN, M. A. RUTMAN, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space,* American Mathematical Society Translations, (1), vol. **10** (1962), pag. 199-325.

[8] C. MIRANDA, *Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale a coefficienti discontinui,* Annali di Matematica Pura e Applicata (4), vol. **63** (1963), pag. 353-386.

[9] M. H. PROTTER, H. F. WEINBERGER, *On the spectrum of general second order operators,* Bullettin of the American Matematical Society, vol. **72** (1966), pag. 251-255.

[10] C. PUCCI, *Limitazioni per soluzioni di equazioni ellittiche,* Annali di Matematica Pura e Applicata (4), vol. **74** (1966), pag. 15-30.

[11] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus,* Annales Institut Fourier (Grenoble), vol. **15** (1965), pag. 189-258.

[12] G. TALENTI, *Sopra una classe di equazioni ellittiche a coefficienti misurabili,* Annali di Matematica Pura e Applicata (4), vol. **69** (1965), pag. 285-304.

[13] — —, *Equazioni lineari ellittiche in due variabili,* Le Matematiche (Catania), vol. **21** (1966), pag. 339-376.