ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Estratto dai *Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*
Serie VIII, vol. LXVI, fasc. 3 - Marzo 1979

Equazioni a derivate parziali. — *Su una classe di equazioni lineari ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui* (*). Nota di MAURIZIO CHICCO, presentata (**) dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — In this note I consider a class of linear second order elliptic partial differential equations with discontinuous coefficients and prove some results concerning the Dirichlet problem for such equations.

1. INTRODUZIONE

Particolari classi di equazioni differenziali alle derivate parziali ellittiche, lineari, del secondo ordine, in forma non variabile e a coefficienti discontinui, sono state oggetto di studio da parte di molti autori (vedi ad esempio [1], [4], [7], [10], [13], [14], [15], [17]).

Scopo della presente Nota è di riprendere una di tali classi (gia considerata in [7], [17], [5]) ed estenderla opportunamente in modo da contenere in essa anche le equazioni studiate da Sharovskii in [15]. In tal modo si deduce per esse un teorema di esistenza ed unicità relativamente al problema di Dirichlet.

Ringrazio il prof. Giorgio Talenti i cui suggerimenti sono stati utili alla redazione della presente Nota.

2. NOTAZIONI ED IPOTESI

Sia Ω un aperto limitato di R^n $(n \geq 3)$ e $\partial\Omega$ rappresentabile localmente come grafico di una funzione di classe C^2. Siano $H^{1,p}(\Omega)$, $H_0^{1,p}(\Omega)$ gli spazi di Banach (sui reali) ottenuti completando rispettivamente $C^1(\overline{\Omega})$, $C_0^1(\Omega)$ secondo la norma

$$\| u \|_{H^{1,p}(\Omega)} = \| u \|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \| u_{x_i} \|_{L_p(\Omega)} .$$

Sia $H^{2,p}(\Omega)$ lo spazio di Banach (sui reali) ottenuto completando $C^2(\overline{\Omega})$ secondo la norma

$$\| u \|_{H^{2,p}(\Omega)} = \| u \|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \| u_{x_i x_j} \|_{L_p(\Omega)} .$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del « Laboratorio per la Matematica applicata » e del GNAFA del C.N.R.
(**) Nella seduta del 10 marzo 1979.

Si scriverà per brevità $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$ rispettivamente in luogo di $H^{1,2}(\Omega)$, $H_0^{1,2}(\Omega)$, $H^{2,2}(\Omega)$.

Siano a_{ij}, b_i, c $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ funzioni definite in Ω, ivi limitate e misurabili; sia $a_{ij} = a_{ji}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ quasi ovunque in Ω e si ponga

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c .$$

3. Risultato

Teorema. *Oltre alle ipotesi elencate in precedenza, supponiamo che esista una costante positiva* a_0 *tale che* $\Sigma a_{ij} t_i t_j \geq a_0 |t|^2$ *in* Ω *per ogni* $t \in R^n$, *e che* $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ *per* $i, j = 1, 2, \cdots, n-1$. *Allora*:

(i) *esistono due costanti* K, λ_0 (*dipendenti dai coefficienti di* L, *da* n *e da* Ω) *tali che risulti*

$$\| u \|_{H^2(\Omega)} \leq K \| Lu + \lambda u \|_{L_2(\Omega)} \tag{2}$$

per ogni $\lambda \geq \lambda_0$ *e per ogni* $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$;

(ii) *per ogni* $\lambda \geq \lambda_0$ *e per ogni* $f \in L_2(\Omega)$ *il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = f & \text{q.o. in } \Omega , \\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3}$$

ammette una ed una sola soluzione;

iii) *se* $c \geq 0$ *q.o. in* Ω, *le* (i), (ii) *valgono non appena* $\lambda \geq 0$;

(iv) *se* $c \geq 0$, $f \geq 0$ *q.o. in* Ω, $\lambda \geq 0$, *la soluzione* u *del problema* (3) *è* ≥ 0 *q.o. in* Ω;

(v) *se* $f \in L_p(\Omega)$ *con* $p > 2n/3$, *la soluzione* u *del problema* (3) *è hölderiana in* $\overline{\Omega}$.

L'operatore L colle ipotesi del teorema precedente è già stato considerato da Sharovskii in [15], che ha provato una diseguaglianza del tipo

$$\| u \|_{H^2(\Omega)} \leq K_1 \{ \| Lu \|_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{L_2(\Omega)} \}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

La dimostrazione del teorema precedente si fonda sulla verifica che, localmente e a meno di opportuni cambiamenti di variabili, l'equazione considerata è « di tipo Cordes ». Si applicano poi i risultati di [5], [7]. Il dattiloscritto contenente la dimostrazione completa sarà inviato a chi ne farà richiesta.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. CAMPANATO (1967) – *Un risultato relativo ad equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa » (3) *21*, 701–707.

[2] M. CHICCO (1971) – *Confronto tra due modi di definire le disuguaglianze per le funzioni di* $H^{1,p}(\Omega)$, « Boll. Un. Mat. Ital. » (4) *4*, 668–676.

[3] M. CHICCO (1971) – *Solvability of the Dirichlet problem in* $H^{2,p}(\Omega)$ *for a class of linear second order elliptic partial differential equations*, « Boll. Un. Mat. Ital. » (4) *4*, 374–387.

[4] M. CHICCO (1972) – *Dirichlet problem for a class of linear second order elliptic partial differential equations with discontinuous coefficients*, « Ann. Mat. Pura Appl. » (4) *92*, 13–23.

[5] M. CHICCO (1974) – *Principio di massimo per soluzioni di equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo Cordes*, « Ann. Mat. Pura Appl. » (4) *100*, 239–258.

[6] M. CHICCO (1977) – *Terzo problema al contorno per una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui*, « Ann. Mat. Pura Appl. » (4) *112*, 241–259.

[7] H. O. CORDES (1961) – *Zero order a priori estimates for soluzions of elliptic differential equations*, « Proc. Symp. Pure Math. » *4*, 157–166.

[8] E. GAGLIARDO (1958) – *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, « Ricerche Mat. », *7*, 102–137.

[9] P. GRISVARD (1975) – *Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polyèdre*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa » (4) *2*, 359–388.

[10] V. IFTIMIE (1968) – *Sur le problème de Dirichlet pour les équations aux coefficients mesurables*, « Rev. Roumaine Math. Pures Appl. », *13*, 1353–1360.

[11] J. KADLEC (1963) – *Sulla regolarità della soluzione del problema di Poisson in una regione il cui bordo è simile a quello di un cubo* (*in russo*), « Czechoslovak Math. J. », *13* (88), 599–611.

[12] W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA and H. F. WEINBERGER (1963) – *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa » (3) *17*, 43–77.

[13] C. MIRANDA (1963) – *Sulle equazioni ellittiche di tipo non variazionale a coefficienti discontinui*, « Ann. Mat. Pura Appl. » (4) *63*, 353–386.

[14] C. MIRANDA (1965) – *Su di una particolare equazione ellittica del secondo ordine a coefficienti discontinui*, « An. Sti. Univ. 'Al. Cuza' Jasi Sect. I A Mat. » (N.S.) *11 B*, 209–215.

[15] A. A. SHAROVSKII (1969) – *On a second order elliptic equation with discontinuous coefficients*, « Moscow Univ. Math. Bull. », *24*, 47–50 (1971).

[16] G. STAMPACCHIA (1965) – *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, « Ann. Inst. Fourier (Grenoble) », *15*, 1, 189–258.

[17] G. TALENTI (1965) – *Sopra una classe di equazioni ellittiche a coefficienti misurabili*, « Ann. Mat. Pura Appl. » (4) *69*, 285–304.

ROMA, 1979 — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei