LUCIA (2)

CHICCO, M.
Boll. U. M. I. - N. 3, 1970, pp. 384-394

Principio di massimo per soluzioni di problemi al contorno misti per equazioni ellittiche di tipo variazionale.

MAURIZIO CHICCO (Genova) (*)

Summary. – *I prove a maximum principle for subsolutions of mixed boundary value problems for linear second order elliptic partial differential equations in divergence form with discontinuous coefficients.*

1. – Introduzione.

Nell'ambito della teoria delle equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui e di tipo variazionale si conoscono varie forme del principio di massimo per le soluzioni del problema di DIRICHLET (vedi ad esempio [10], [2]) e di NEUMANN (vedi [7]).

Per quanto riguarda il mio precedente lavoro [2], colgo l'occasione per correggere alcune sviste in cui sono incorso (ringrazio R. M. HERVÉ che me le ha gentilmente segnalate). Il risultato principale di [2], tuttora valido e riportato qui come Lemma 5, si fonda su di un Lemma (a pag. 369-370 di [2]) che va letto nel modo seguente:

LEMMA. – « *Sia $a'(u, v)$ la forma bilineare su $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ così definita:*

$$a'(u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i - d_i) u_{x_i} v \right\} dx .$$

Sia A un aperto contenuto in Ω colla propria chiusura e tale che la forma $a'(u, v)$ sia coercitiva su $H_0^1(A)$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ tale che: $u \geqslant 0$ in Ω, $a(u, v) \leqslant 0$ per ogni $v \in H_0^1(A)$, $v \geqslant 0$. Se z_A è la soluzione del

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del centro di ricerca di matematica e fisica teorica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Università di Genova.

problema di Dirichlet

$$\begin{cases} a'(z_A, v) = 0 & \textit{per ogni } v \in H_0^1(A)\,, \\ z_A - u \in H_0^1(A)\,, \end{cases}$$

risulta $u \leqslant z_A$ *quasi ovunque in* A. »

DIMOSTRAZIONE. – Poniamo $\bar{u} = \max(u - z_A, 0)$. Allora è $\bar{u} \in H_0^1(A)$, $\bar{u} \geqslant 0$ e quindi

$$0 \geqslant a(u, \bar{u}) - a'(z_A, \bar{u}) =$$
$$= \int_A \Big\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(u - z_A)_{x_i} \bar{u}_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i - d_i)(u - z_A)_{x_i} \bar{u} + d_i(u\bar{u})_{x_i} + cu\bar{u} \Big\} dx\,.$$

Osserviamo che si ha:

$$(*) \qquad \int_A \Big\{ \sum_{i=1}^n d_i(u\bar{u})_{x_i} + cu\bar{u} \Big\} dx \geqslant 0\,.$$

Infatti è $u \in L_\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ (Teorema 4.1 di [10]), $\bar{u} \in L_\infty(A) \cap \cap H_0^1(A)$ e quindi $u\bar{u} \in H_0^1(A)$. Ne segue, per l'ipotesi fatta su $c - \sum_{i=1}^n (d_i)_{x_i}$, che

$$\int_A \Big\{ \sum_{i=1}^n d_i v_{x_i} + cv \Big\} dx \geqslant 0 \qquad \text{per ogni } v \in C_0^\infty(A),\ v \geqslant 0$$

da cui la $(*)$ essendo $C_0^\infty(A)$ denso in $H_0^1(A)$. Dalla $(*)$ si ricava

$$0 \geqslant \int_A \Big\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \bar{u}_{x_i} \bar{u}_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i - d_i) \bar{u}_{x_i} \bar{u} \Big\} dx \geqslant \text{cost.}\, \|\bar{u}\|^2_{H_0(A)}\,.$$

Pertanto risulta $\bar{u} = 0$ quasi ovunque in A, cioè $u \leqslant z_A$ quasi ovunque in A, c.v.d.

Scopo del presente lavoro è studiare un principio di massimo per problemi al contorno più generali: su una parte della frontiera di Ω si assegnano i valori della soluzione, e sul resto si assegnano i valori di una combinazione lineare tra la soluzione e la sua derivata conormale. Il principale risultato che si dimostra è formalmente il seguente: se u soddisfa alla disequazione

$$(1) \qquad Lu = -\sum_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n a_{ij} u_{x_i} + d_j u \Big)_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu \leqslant 0 \qquad \text{in } \Omega\,,$$

e alle condizioni al contorno

$$(2) \qquad u = w \quad \text{su } \Gamma_0, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \cos(\boldsymbol{n}, x_j) + eu \leqslant 0 \quad \text{su } \Gamma_1$$

$(\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega,\ \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset)$, allora l'estremo superiore essenziale di u in Ω si maggiora, se positivo, col massimo di w su Γ_0, oppure u è costante in Ω. I coefficienti che definiscono l'operatore L non si suppongono regolari e quindi conviene impostare il problema (1), (2) in forma debole. Nel caso invece in cui i coefficienti siano abbastanza regolari l'operatore L si può scrivere anche in forma classica (non variazionale) e in tal caso si ritrovano risultati noti (vedi [8], [9]).

2. – Notazioni ed ipotesi.

Nel seguito si faranno sempre le ipotesi seguenti, senza esplicita menzione. Sia Ω un insieme aperto limitato e connesso di R^n. Supponiamo per semplicità $n \geqslant 3$; i risultati valgono anche per $n = 2$ pur di modificare, nel seguito, qualche esponente di sommabilità negli spazi funzionali considerati.

Siano $H^1(\Omega)$ e $H^1_0(\Omega)$ gli spazi ottenuti completando rispettivamente $C^1(\bar{\Omega})$ e $C^1_0(\Omega)$ secondo la norma

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|^2_{L_2(\Omega)} .$$

Sia B un sottoinsieme di $\bar{\Omega}$; si possono dare due diverse definizioni di capacità di B. La prima è la ben nota capacità della teoria del potenziale:

$$\operatorname{cap} B = \inf \{\|f_x\|^2_{L_2(R^n)} : f \in C^1_0(R^n),\ f \geqslant 1 \text{ in } B\} ;$$

si noti che questa definizione non dipende da Ω.

Un altro concetto di capacità è il seguente: chiamiamo capacità di B rispetto ad Ω il numero

$$\operatorname{cap}_\Omega B = \inf \{\|f\|^2_{H^1(\Omega)} : f \in C^1(\bar{\Omega}),\ f \geqslant 1 \text{ in } B\} .$$

Le capacità testè definite non sembrano sempre equivalenti; sussiste tuttavia il seguente

LEMMA 1. – « *Esiste una costante* K_1, *dipendente da* n *e da* Ω, *tale che*

$$\operatorname{cap}_\Omega B \leqslant K_1 \operatorname{cap} B .$$

Se Ω *ha frontiera localmente lipschitziana esiste una costante* K_2 *dipendente da* n *e da* Ω *tale che*

$$\operatorname{cap} B \leqslant K_2 \operatorname{cap}_\Omega B . »$$

DIMOSTRAZIONE: si trova nell'Appendice.

Sia $B \subset \bar{\Omega}$, $u \in H^1(\Omega)$, k costante. Diremo che $u \leqslant k$ $(u = k)$ in B nel senso di $H^1(\Omega)$ se esiste una successione $u_j \in C^1(\bar{\Omega})$ tale che $u_j \leqslant k$ $(u_j = k)$ in B per $j = 1, 2, \ldots$ e $\lim\limits_{j\to\infty} \|u - u_j\|_{H^1(\Omega)} = 0$.

Poniamo poi

$$\max_B{}^* u = \inf \{k \colon u \leqslant k \text{ in } B \text{ nel senso di } H^1(\Omega)\} .$$

LEMMA 2. – « *Sia* Ω *dotato di frontiera rappresentabile localmente come grafico di una funzione continua. Sia* $B \subset \bar{\Omega}$ *e* $\operatorname{cap}_\Omega B > 0$. *Allora esiste una costante* K_5 *dipendente da* n, B, Ω, *tale che sia*

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} \leqslant K_5 \|f_x\|_{L_2(\Omega)}$$

per ogni $f \in H^1(\Omega)$, $f = 0$ *in* B *nel senso di* $H^1(\Omega)$ ».

DIMOSTRAZIONE: vedi [3].

D'ora in avanti faremo le seguenti ipotesi supplementari su Ω. Sia Γ_0 un sottoinsieme chiuso di $\partial\Omega$ e sia $\Gamma_1 = \partial\Omega - \Gamma_0$. Supponiamo che esista un aperto Ω_1, contenente Ω, dotato di frontiera localmente lipschitziana e tale che $\Gamma_1 \subset \partial\Omega_1$. Indichiamo poi con V il sottospazio lineare di $H^1(\Omega)$ così definito:

$$V = \{f \colon f \in H^1(\Omega),\ f = 0 \text{ su } \Gamma_0 \text{ nel senso di } H^1(\Omega)\} .$$

Sussiste il seguente:

LEMMA 3. – « *Sia* B *un sottoinsieme di* $\bar{\Omega}$ *avente capacità positiva rispetto a* Ω. *Allora esiste una costante positiva* K_6 *dipendente da* n, B, Ω *tale che sia*

$$\|u\|_{L_{2n/(n-2)}(\Omega)} \leqslant K_6 \|u_x\|_{L_2(\Omega)} ,$$

per ogni funzione $u \in V$, $u = 0$ *in* B *nel senso di* $H^1(\Omega)$. »

DIMOSTRAZIONE: si trova nell'Appendice.

Studiamo ora il modo di tradurre in forma debole le (1), (2). Moltiplichiamo la (1) per una funzione test $v \in V \cap C^1(\bar{\Omega})$, $v \geqslant 0$ in Ω, ed integriamo per parti; si ottiene formalmente:

$$0 \geqslant \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i u_{x_i} + d_i u v_{x_i}) + cuv \right\} dx - \\ - \int_{\Gamma_1} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \cos(\boldsymbol{n}, x_j) v + \sum_{i=1}^n d_i u \cos(\boldsymbol{n}, x_i) v \right\} d\sigma ;$$

qui $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale a $\partial\Omega$ orientata verso l'esterno (ove esiste). Tenendo conto della (2) si ricava:

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i u_{x_i} v + d_i u v_{x_i}) + cuv \right\} dx + \\ + \int_{\Gamma_1} \left[e - \sum_{i=1}^n d_i \cos(\boldsymbol{n}, x_i) \right] uv \, d\sigma \leqslant 0 \tag{3}$$

per ogni $v \in V \cap C^1(\bar{\Omega})$, $v \geqslant 0$. Queste considerazioni inducono a formulare le (1), (2) in forma debole del modo seguente. Posto

$$g = e - \sum_{i=1}^n d_i \cos(\boldsymbol{n}, x_i),$$

supponiamo che: $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} t_i t_j \geqslant \nu |t|^2$, ν costante positiva, b_i, $d_i \in L_n(\Omega)$, $c \in L_{n/2}(\Omega)$, $g \in L_{n-1}(\Gamma_1)$.

Posto ancora

$$a(u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i u_{x_i} v + d_i u v_{x_i}) + cuv \right\} dx + \int_{\Gamma_1} guv \, d\sigma$$

per le ipotesi fatte, per la disuguaglianza di HÖLDER e per noti teoremi sugli spazi di SOBOLEV, si verifica che l'espressione $a(u,v)$ è una forma bilineare su $V \times V$. Più in generale osserviamo che se $u \in H^1(\Omega)$ e $\max^*_{\Gamma_0} |u| < +\infty$, allora $a(u, \cdot)$ è un elemento del duale di V.

Supponiamo poi che sia

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n d_i f_{x_i} + cf \right) dx + \int_{\Gamma_1} gf \, d\sigma \geqslant 0 \tag{4}$$

per ogni $f \in V$, $f \geqslant 0$. Ciò accade ad esempio se $d_i \in C^1(\bar{\Omega})$, $c - \sum_{i=1}^{n} (d_i)_{x_i} \geqslant 0$ in Ω, $g + \sum_{i=1}^{n} d_i \cos(n, x_i) \geqslant 0$ su Γ_1.

Sussistono allora i seguenti risultati:

LEMMA 4. – « *Sia* $u_i \in H^1(\Omega)$, $a(u_i, v) \leqslant 0$ *per ogni* $v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap V$, $v \geqslant 0$ $(i = 1, 2)$. *Allora posto* $w = \max(u_1, u_2)$ *si ha* $a(w, v) \leqslant 0$ *per ogni* $v \in V \cap C^1(\bar{\Omega})$, $v \geqslant 0$. »

DIMOSTRAZIONE: salvo poche varianti, è la stessa di [10], Teorema 3.5.

LEMMA 5. – « *Sia* $u \in H^1(\Omega)$, $a(u, v) \leqslant 0$ *per ogni* $v \in C_0^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$. *Allora se* u *non è costante in* Ω, *risulta*

$$\mathrm{ess}_D \sup u < \mathrm{ess}_\Omega \sup u$$

per ogni compatto D *contenuto in* Ω. »

DIMOSTRAZIONE: è un'ovvia conseguenza del Teorema 2 di [2].

Possiamo ora enunciare il principale risultato del presente lavoro.

TEOREMA 1. – « *Siano verificate tutte le ipotesi fin qui dette. Sia* $u \in H^1(\Omega)$ *tale che* $a(u, v) \leqslant 0$ *per ogni* $v \in V \cap C^1(\bar{\Omega})$, $v \geqslant 0$. *Allora* u *gode di una (almeno) delle seguenti proprietà:*

a) $u =$ *costante positiva in* Ω. *In tal caso il primo membro della* (4) *è nullo per ogni* $f \in V$.

b) $u \leqslant \max(0, \max_{\Gamma_0}^* u)$ *quasi ovunque in* Ω. »

DIMOSTRAZIONE. – Innanzi tutto se u è una costante positiva in Ω si ha

$$a(u, v) = u \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} d_i v_{x_i} + cv \right) dx + u \int_{\Gamma_1} gv \, d\sigma \leqslant 0$$

per ogni $v \in V \cap C^1(\bar{\Omega})$, $v \geqslant 0$. Dalla (4) segue subito

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} d_i v_{x_i} + cv \right) dx + \int_{\Gamma_1} gv \, d\sigma = 0 \qquad \text{per ogni } v \in V.$$

Sia dunque u non costante in Ω e facciamo vedere che vale la condizione *b)*. Intanto dal Lemma 4 segue che non è restrittivo supporre $u \geqslant 0$ in Ω, perché se così non fosse si può ragionare sulla funzione $\max(u, 0)$.

Posto $m = \max(0, \max_{\Gamma_0}{}^* u)$, $M = \mathrm{ess}_\Omega \sup u$ $(\leqslant +\infty)$, sia per assurdo $m < M$. Per quanto osservato in precedenza, $a(u, \cdot)$ è allora un elemento del duale di V. Ne segue che $a(u, v)$ è ben definito per ogni $v \in V$ e risulta $a(u, v) \leqslant 0$ per ogni $v \in V$, $v \geqslant 0$. Scelto k in modo che $m < k < M$, consideriamo la funzione $v_k = \max(u - k, 0)$; risulta $v_k \in V$, $v_k \geqslant 0$ e quindi $a(u, v_k) \leqslant 0$. Cioè

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad & a(u, v_k) = \\
& = \int_\Omega \Big\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} (v_k)_{x_j} + \sum_{i=1}^n [b_i u_{x_i} v_k + d_i u (v_k)_{x_i}] + c u v_k \Big\} dx + \int_{\Gamma_1} g u v_k \, d\sigma \leqslant 0 \, .
\end{aligned}
$$

Osserviamo che risulta $uv_k \geqslant 0$ in Ω. Tenendo presente la (4) si ha

$$
(6) \qquad \int_\Omega \Big[c u v_k + \sum_{i=1}^n d_i u_{x_i} v_k + \sum_{i=1}^n d_i u (v_k)_{x_i} \Big] dx + \int_{\Gamma_1} g u v_k \, d\sigma \geqslant 0
$$

e dalle (5), (6) segue

$$
(7) \qquad \int_\Omega \Big\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} (v_k)_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i - d_i) u_{x_i} v_k \Big\} dx \leqslant 0 \, .
$$

Poniamo ora $\Omega(k) = \{x : \, x \in \Omega, \; u(x) \geqslant k\}$.

Risulta $v_k \equiv (v_k)_{x_i} \equiv 0$ in $\Omega - \Omega(k)$, $(v_k)_{x_i} \equiv u_{x_i}$ in $\Omega(k)$, quindi la (7) si può scrivere:

$$
(8) \qquad \int_{\Omega(h)} \Big\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (v_k)_{x_i} (v_k)_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i - d_i)(v_k)_{x_i} v_k \Big\} dx \leqslant 0 \, .
$$

Dal lemma 5 si ottiene

$$
(9) \qquad \mathrm{ess}_D \sup u < M \, ,
$$

per ogni aperto D propriamente contenuto in Ω. Ne segue che $\mathrm{mis}\, \Omega(M) = 0$ e inoltre

$$
(10) \qquad \lim_{k \to M} \mathrm{mis}\, \Omega(k) = 0 \, .
$$

Fissiamo ora un qualunque dominio compatto D contenuto in Ω. Dalla (9) segue che esiste un numero $k_0 < M$ tale che

$$
(11) \qquad v_k \equiv 0 \text{ in } D \text{ per ogni } k \geqslant k_0 \, .
$$

Dalla (8) si ricava intanto, tenendo presenti le ipotesi fatte e la disuguaglianza di HÖLDER:

$$\nu\|(v_k)_x\|^2_{L_2(\Omega(k))} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|b_i - d_i\|_{L_n(\Omega(k))} \cdot \|v_k\|_{L_{2n/(n-2)}(\Omega(k))} \cdot \|(v_k)_x\|_{L_2(\Omega(k))} . \tag{12}$$

Dalla (11) si deduce la possibilità di applicare il lemma 3 alle funzioni v_k non appena $k \geqslant k_0$; risulta

$$\|v_k\|_{L_{2n/(n-2)}(\Omega(k))} \leqslant K_6 \|(v_k)_x\|_{L_2(\Omega(k))} , \tag{13}$$

ove la costante K_6 dipende da n, D, Ω ma non da k. Dalle (12), (13) si trae

$$\nu\|(v_k)_x\|^2_{L_2(\Omega(k))} \leqslant K_6 \sum_{i=1}^{n} \|b_i - d_i\|_{L_n(\Omega(k))} \cdot \|(v_k)_x\|^2_{L_2(\Omega(k))} . \tag{14}$$

Facciamo ora tendere k ad M. Per la (10) risulta $\lim\limits_{k \to M} \|b_i - d_i\|_{L_n(\Omega(k))} = 0$. Dalla (14) segue allora che è $\|(v_k)_x\|_{L_2(\Omega(k))} = 0$ se k è abbastanza vicino ad M, cioè (vedi la (13)): $v_k = 0$ quasi ovunque in Ω per qualche $k < M$, assurdo. c.v.d.

OSSERVAZIONE. – Il teorema precedente è ancora vero se $\Gamma_0 = \partial\Omega$; in questo caso si ritrova, in forma debole, il risultato di [2]. Nel caso $\Gamma_0 = \emptyset$, o anche $\mathrm{cap}_\Omega \Gamma_0 = 0$, risulta $\max\limits_{\Gamma_0}{}^* u = -\infty$ e quindi la condizione b) del teorema precedente diventa: $u \leqslant 0$ quasi ovunque in Ω.

Se inoltre il primo membro della (4) è nullo per ogni $f \in V$, risulta allora $a(u + k, v) \leqslant 0$ per ogni costante k e per ogni $v \in V \cap \cap C^1(\bar{\Omega})$, $v \geqslant 0$, da cui seguirebbe $u + k \leqslant 0$ quasi ovunque in Ω, assurdo per l'arbitrarietà di k. Pertanto in tal caso vale la proprietà a) ed u è costante. Ciò è in accordo con risultati classici (vedi ad esempio [8] pag. 65). Nel caso infine in cui $\Gamma_0 = \emptyset$, $e \equiv 0$, si ha il problema di NEUMANN: esso è studiato in maniera più completa in [7], ove si ammette anche che l'ellitticità dell'equazione possa degenerare.

Studiamo ora la risolubilità dei problemi al contorno del tipo (formalmente):

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega , \\ u = w & \text{su } \Gamma_0 , \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \cos(n, x_j) + eu = h & \text{su } \Gamma_1 . \end{cases} \tag{15}$$

Con un procedimento analogo a quanto fatto in precedenza per ottenere la (3), si vede che l'impostazione debole del problema (15) si può realizzare nel modo seguente. Siano date funzioni $w \in H^1(\Omega)$, $h \in L_{(2n-2)/n}(\Gamma_1)$, $f \in L_{2n/(n+2)}(\Omega)$.

Si cerca una funzione u tale che

$$(16) \qquad \begin{cases} a(u, v) = \displaystyle\int_\Omega fv\,dx + \int_{\Gamma_1} hv\,d\sigma & \text{per ogni } v \in V, \\ u - w \in V. \end{cases}$$

È noto (vedi ad esempio [5] pag. 160 e [6]) che il problema (16) si inquadra nella teoria di RIESZ-FREDHOLM e quindi per esso vale il teorema di esistenza ed unicità non appena si dimostri che il corrispondente problema omogeneo ammette soltanto la soluzione identicamente nulla.

Allora i risultati precedentemente provati permettono di affermare quanto segue:

TEOREMA 2. – « *Supponiamo soddisfatta una almeno delle seguenti condizioni:*

a) esiste una funzione $v \in V$ *tale che*

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n d_i v_{x_i} + cv \Big)\,dx + \int_{\Gamma_1} gv\,d\sigma \neq 0\,;$$

b) risulta $\mathrm{cap}_\Omega\, \Gamma_0 > 0$.

Allora il problema (16) *ammette una ed una sola soluzione.* »

DIMOSTRAZIONE. – Per quanto detto sopra basta far vedere che il corrispondente problema omogeneo

$$(17) \qquad \begin{cases} a(u, v) = 0 \quad \text{per ogni } v \in V\,, \\ u \in V\,, \end{cases}$$

ammette solo la soluzione identicamente nulla. Nel caso *a*) ciò segue immediatamente dal Teorema 1. Nel caso *b*) dal Teorema 1 si ha che la soluzione u di (17) è costante in Ω ed appartiene a V: per il Lemma 3, u è identicamente nulla in Ω, c.v.d.

Dalla (8) si ricava intanto, tenendo presenti le ipotesi fatte e la disuguaglianza di HÖLDER:

$$(12)\qquad \nu\|(v_k)_x\|^2_{L_2(\Omega(k))}\leqslant\sum_{i=1}^n\|b_i-d_i\|_{L_n(\Omega(k))}\cdot\|v_k\|_{L_{2n/(n-2)}(\Omega(k))}\cdot\|(v_k)_x\|_{L_2(\Omega(k))}\,.$$

Dalla (11) si deduce la possibilità di applicare il lemma 3 alle funzioni v_k non appena $k\geqslant k_0$; risulta

$$(13)\qquad \|v_k\|_{L_{2n/(n-2)}(\Omega(k))}\leqslant K_6\|(v_k)_x\|_{L_2(\Omega(k))}\,,$$

ove la costante K_6 dipende da n, D, Ω ma non da k. Dalle (12), (13) si trae

$$(14)\qquad \nu\|(v_k)_x\|^2_{L_2(\Omega(k))}\leqslant K_6\sum_{i=1}^n\|b_i-d_i\|_{L_n(\Omega(k))}\cdot\|(v_k)_x\|^2_{L_2(\Omega(k))}\,.$$

Facciamo ora tendere k ad M. Per la (10) risulta $\lim\limits_{k\to M}\|b_i-d_i\|_{L_n(\Omega(k))}=0$. Dalla (14) segue allora che è $\|(v_k)_x\|_{L_2(\Omega(k))}=0$ se k è abbastanza vicino ad M, cioè (vedi la (13)): $v_k=0$ quasi ovunque in Ω per qualche $k<M$, assurdo. c.v.d.

OSSERVAZIONE. – Il teorema precedente è ancora vero se $\Gamma_0=\partial\Omega$; in questo caso si ritrova, in forma debole, il risultato di [2]. Nel caso $\Gamma_0=\varnothing$, o anche $\operatorname{cap}_\Omega\Gamma_0=0$, risulta $\max\limits_{\Gamma_0}{}^* u=-\infty$ e quindi la condizione b) del teorema precedente diventa: $u\leqslant 0$ quasi ovunque in Ω.

Se inoltre il primo membro della (4) è nullo per ogni $f\in V$, risulta allora $a(u+k,v)\leqslant 0$ per ogni costante k e per ogni $v\in V\cap$ $\cap\, C^1(\bar\Omega)$, $v\geqslant 0$, da cui seguirebbe $u+k\leqslant 0$ quasi ovunque in Ω, assurdo per l'arbitrarietà di k. Pertanto in tal caso vale la proprietà a) ed u è costante. Ciò è in accordo con risultati classici (vedi ad esempio [8] pag. 65). Nel caso infine in cui $\Gamma_0=\varnothing$, $e\equiv 0$, si ha il problema di NEUMANN: esso è studiato in maniera più completa in [7], ove si ammette anche che l'ellitticità dell'equazione possa degenerare.

Studiamo ora la risolubilità dei problemi al contorno del tipo (formalmente):

$$(15)\qquad \begin{cases} Lu=f & \text{in } \Omega\,,\\ u=w & \text{su } \Gamma_0\,,\\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\cos(n,x_j)+eu=h & \text{su } \Gamma_1\,. \end{cases}$$

Appendice.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 1. – Per noti teoremi sugli spazi di SOBOLEV esiste una costante K_3 dipendente solo da n tale che

$$\|f\|_{L_{2n/(n-2)}(R^n)} \leq K_3 \|f_x\|_{L_2(R^n)} \tag{18}$$

per ogni $f \in C_0^1(R^n)$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $g \in C_0^1(R^n)$ tale che $g \geq 1$ in B,

$$\|g_x\|^2_{L_2(R^n)} \leq \operatorname{cap} B + \varepsilon .$$

Risulta allora, per la (18) e per la disuguaglianza di HÖLDER:

$$\|g\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \|g\|^2_{L_{2n/(n-2)}(\Omega)} \cdot (\operatorname{mis} \Omega)^{2/n} \leq K_3^2 (\operatorname{mis} \Omega)^{2/n} \|g_x\|^2_{L_2(\Omega)} \leq$$
$$\leq K_3^2 (\operatorname{mis} \Omega)^{2/n} (\operatorname{cap} B + \varepsilon) .$$

Di qui e dalla definizione di $\operatorname{cap}_\Omega B$ si ha:

$$\operatorname{cap}_\Omega B \leq \|g\|^2_{L_2(\Omega)} + \|g\|^2_{L_2(\Omega)} \leq [1 + K_3^2 (\operatorname{mis} \Omega)^{2/n}] \cdot (\operatorname{cap} B + \varepsilon) .$$

Per l'arbitrarietà di ε ne segue la prima parte della tesi.

Sia ora $\partial\Omega$ localmente lipschitziana. Per i risultati di [1] esiste una costante K_4 dipendente da n e da Ω tale che per ogni funzione $u \in C^1(\bar{\Omega})$ esiste una funzione $\hat{u} \in C_0^1(R^n)$ per cui $u = \hat{u}$ in $\bar{\Omega}$, $\|\hat{u}\|_{H^1(R^n)} \leq K_4 \|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Dato ora $\varepsilon > 0$, sia $v \in C^1(\bar{\Omega})$ tale che $v \geq 1$ in B, $\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \operatorname{cap} B + \varepsilon$. Per quanto detto sopra esiste una funzione $\hat{v} \in C_0^1(R^n)$, $v = \hat{v}$ in $\bar{\Omega}$, $\|\hat{v}\|_{H^1(R^n)} \leq K_4 \|v\|_{H^1(\Omega)}$. Risulta allora:

$$\operatorname{cap} B \leq \|\hat{v}_x\|^2_{L_2(R^n)} \leq \|\hat{v}\|^2_{H^1(R^n)} \leq K_4^2 \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq K_4^2 (\operatorname{cap}_\Omega B + \varepsilon) .$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. c.v.d.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 3. – Si vede facilmente che le funzioni di V, prolungate uguali a zero in $\Omega_1 - \Omega$, appartengono ad $H^1(\Omega_1)$. Se $u \in V$, continuiamo a chiamare u la funzione di $H^1(\Omega_1)$ ottenuta prolungando u nel modo detto. Per noti teoremi sugli spazi di SOBOLEV risulta:

$$\|u\|_{L_{2n/(n-2)}(\Omega)} = \|u\|_{L_{2n/(n-2)}(\Omega_1)} \leq K_7 [\|u\|_{L_2(\Omega_1)} + \|u_x\|_{L_2(\Omega_1)}] , \tag{19}$$

valida per ogni $u \in V$, ove K_7 dipende solo da n e da Ω_1. Applicando il Lemma 2 si ha

$$\|u\|_{L_2(\Omega_1)} \leqslant K_5 \|u_x\|_{L_2(\Omega_1)}, \tag{20}$$

valida per ogni $u \in V$, $u = 0$ in B nel senso di $H^1(\Omega)$. Dalle (19), (20) risulta, per le stesse funzioni:

$$\|u\|_{L_{2n/(n-2)}(\Omega)} \leqslant K_7(1 + K_5)\|u_x\|_{L_2(\Omega)},$$

cioè la tesi, c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Adams - N. Aronszajn - K. T. Smith, *Theory of Bessel potentials, part 2*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **17** (1967), pp. 1-136.

[2] M. Chicco, *Principio di massimo forte per sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale*, Boll. U.M.I., S. III, **22** (1967), pp. 368-372.

[3] W. F. Donoghue, *A coerciveness inequality*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (3), **20** (1966), pp. 589-593.

[4] E. Gagliardo, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche Mat., **7** (1958), pp. 102-137.

[5] O. A. Ladyzhenskaia - N. N. Ural'tzeva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press (New York), 1968.

[6] C. Miranda, *Alcune osservazioni sulla maggiorazione in L^ν delle soluzioni deboli delle equazioni ellittiche del secondo ordine*. Ann. di Mat. Pura e Appl. (4), **61** (1963), pp. 151-169.

[7] M. K. Murthy - G. Stampacchia, *Boundary value problems for some degenerate elliptic operators*, Ann. di Mat. Pura e Appl. (4), **80** (1968), pp. 1-122.

[8] M. H. Protter - H. F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1968).

[9] C. Pucci, *Maggiorazione della soluzione di un problema al contorno, di tipo misto, relativo ad una equazione a derivate parziali, lineare, del secondo ordine*, Rend. Acc. Naz. Lincei (cl. sc. fis. mat. nat.) (8), **13** (1952), pp. 360-366.

[10] G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **15** (1965), pp. 189-258.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 31 dicembre 1969